Н.П. БРУСЕНЦОВ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СИЛЛОГИСТИКИ

Силлогистика — древнейшая логическая система. Научное изложение ее было дано Аристотелем 2300 лет тому назад [1]. Впоследствии были открыты и получили развитие другие логические системы, в частности, исчисления высказываний и предикатов, составляющие основу современной математической логики.

Возникшая на основе богатого опыта, накопленного математикой, использующая ее методы и алгебраический язык, математическая логика представляется по сравнению с древней логикой Аристотеля более развитой, строгой и универсальной наукой. Однако у нее есть слабая сторона. Как наука более высокого уровня, математическая логика должна бы либо включить логику Аристотеля и качестве своей составной части, подтвердив ее правильность, либо отвергнуть, показав несостоятельность тех или иных ее положений. До сих пор ни первое, ни второе сделано не было. А рассуждения людей, в том числе математиков и даже математических логиков, по-прежнему строятся по тем правилам, которые сформулировал Аристотель, и, надо полагать, не только потому, что люди еще недостаточно обучены математической логике.

Наша задача будет заключаться в изложении и анализе силлогистики современными математическими средствами. Помимо указанного выше методологического значения, эта задача не лишена интереса в связи с поисками путей машинизации мышления, которые в современном мире приобрели первостепенную важность.

I. КРАТКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СОСТОЯНИЯ ПРОБЛЕМЫ

Первые попытки алгебраизации силлогистики были предприняты Лейбницем, который в различные периоды своей жизни неоднократно принимался за решение этой задачи, придавая ей исключительно большое значение [2]. Однако 300 лет спустя по поводу этих усилии было высказано сожаление, что «и самые счастливые свои идеи он принес в жертву желанию вновь получить правила Аристотеля, даже те, которые полностью несовместимы с понятием пустого множества» (3, стр. 306].

Современная математическая логика усматривает оправдание тому, что силлогистика оказалась за ее пределами, в нецелесообразности для математических применений принятого в силлогистике истолкования предложений вида «Всякое x есть y», которые по Аристотелю признаются истинными лишь, если существуют предметы, составляющие класс x [4, стр. 79]. Ход рассуждении, приводящий к такому заключению, вкратце можно охарактеризовать следующим образом. Предложение «Всякое x есть y» отождествляется с формулой, которая выражает в исчислении классов отношение «Класс x содержится в классе y». Предложение «Никакое x не есть y» отождествляется с формулой отношения «Класс x содержится в классе, дополнительном к классу y». Формулы предложений «Некоторое x есть y» и «Некоторое x не есть y» получаются отрицанием соответственно формул, отождествленных с предложениями «Никакое x не есть y» и «Всякое x есть y». При таком истолковании предложений в исчислении классов выводимо большинство законов силлогистики и 15 из 19 правильных модусов силлогизма, однако не могут быть выведены законы подчинения и четыре модуса, обозначаемые в традиционной логике словами: bamalip, darapti, felapton, lesapo [4]. Для того чтобы их вывести, требуется дополнительное предположение, что классы, о которых идет речь в предложениях силлогистики, не пусты. Таким образом, формулы, с которыми были отождествлены предложения силлогистики, неточно выражают смысл, вложенный в эти предложения Аристотелем.

Нам неизвестно, в чем заключается нецелесообразность для математических применений аристотелева истолкования предложений силлогистики, и представляется странным, что истолкование, удовлетворявшее 2300 лет и продолжающее удовлетворить любые применения логики, оказалось неудовлетворительным для математических применений. Можно, впрочем, не рассуждая о целесообразности, попытаться построить в том же исчислении классов формулы, точно выражающие смысл предложений силлогистики, вложенный в них Аристотелем. В дальнейшем мы так и поступим, а пока заметим, что просто приписыванием к указанным выше формулам условия непустости обозначенных в них классов это не достигается. Например, если принять, что необходимым условием истинности предложения «Всякое x есть y» является непустость класса x, то противоположное предложение «Некоторое x не есть y» формально оказывается истинным в случае, если класс x пуст, что находится в противоречии с буквальным смыслом этого предложения. Таким образом, может быть следует говорить не о нецелесообразности, а о трудности воспроизведения точного смысла аристотелевых предложений средствами современной математической логики.

Общепринятый путь обхода этой трудности заключается в том, что для представления предложений силлогистики применяются формулы, не удовлетворяющие законам подчинения, например предложение «Всякое x есть y» на языке исчисления предикатов записывается в виде [5]

$$\forall v\,(X\,(v) \to Y\,(v)),$$

на языке теории множеств — в виде [3, 6]: $X \subset Y$ с оговоркой, что термины X и Y не пусты.

Так как используемые исчисления не содержат никаких правил относительно такого рода оговорок, то применить их к формулам с оговорками нельзя. Иначе говоря, формулы с оговорками не есть формулы, и представление ими предложений не выражает смысл этих предложении в используемом исчислении.

Совершенно необоснованными являются также попытки представить силлогистику как систему, которой вообще чуждо понятие пустого класса [5, 7]. В качестве примера, опровергающего эту концепцию, укажем, что предложение «Всякое x есть y» выражает как раз то, что класс объектов, которые есть x, но не есть y, пуст.

В результате безуспешных попыток математического выражения силлогистики сложилось, мнение, что силлогистика является «своеобразной логической системой, которую нельзя вывести только из собственных предпосылок исчисления предикатов» [5, стр. 34]. В связи с этим были разработаны системы формализации силлогистики на базе специальной аксиоматики [8, 5]. Однако в этих системах основные предложения силлогистики представлены простыми (нерасчленяемыми) формулами-функторами, т. е. задача о раскрытии внутренней структуры предложений в них даже не ставится.

2. КЛАСС РАССМАТРИВАЕМЫХ ОБЪЕКТОВ

Термины предложений силлогистики мы будем рассматривать как признаки, по которым различаются объекты, характеризуемые терминами. Употребляемые нами в качестве терминов малые латинские буквы являются обозначениями (именами) этих признаков. Такая трактовка строго соответствует идее Аристотеля, который, как известно, отношение, выражаемое теперь словами «Всякое x есть y», формулировал более определенно: «Всякому x присуще y», что следует рассматривать, как сокращение следующего: «Всякому (объекту), обладающему признаком x, присущ признак y».

Все объекты, обладающие данным признаком x, составляют класс x. Мы намеренно применяем в качестве имени класса имя определяющего этот класс признака, т. е. обозначаем их одной и той же буквой. Кроме того, эта же буква будет обозначать переменную, представляющую данный признак и определяемый им класс, в формулах, которыми будут выражены отношения силлогистики. Это не приведет к путанице, так как признак, определяемый им класс и представляющая их переменная, – все это лишь разные стороны, разные формы выражения одного и того же объекта: класса, определенного признаком и представленного переменной x.

Мы ограничимся рассмотрением класса объектов, который далее будем обозначать буквой u. Определяющий признак этого класса заключается в том, что его объекты удовлетворяют допущению, которое Аристотель назвал «самым достоверным из всех начал» и выразил словами: «Невозможно, чтобы одно и то же вместе было и не было присуще одному и тому же и в одном и том же смысле» [9, стр. 63, 1005b)].

Этот постулат, впоследствии названный законом запрещения противоречия, составляет непременную основу всякой логической системы. Он выражает необходимое условие различимости рассматриваемых объектов. Если же объекты неразличимы, то логический анализ их невозможен.

Производя разбиение рассматриваемого множества объектов на классы относительно некоторого признака, мы не вправе допустить, чтобы один и тот же объект принадлежал более чем к одному классу, потому что такое допущение несовместимо с идеей разбиения: оно равносильно допущению пересечения классов, а при разбиении пересечение классов недопустимо.

Итак, мы относим к классу u лишь безусловно различимые (дискретные, счетные) объекты. Неразличимые объекты, т. е. претендующие на принадлежность к более чем одному классу разбиения, находятся за пределами класса u, «не существуют», образуют пустой класс. Далее мы считаем, что многообразие в классе u определяется n независимыми признаками, причем диапазон значений, которые могут быть приписаны числу n, в принципе не ограничен.

Принимая в качестве определяющего признака класса *и* подчиненность объектов этого класса постулату Аристотеля о безусловной различимости, мы, с одной стороны, устанавливаем необходимую основу для логических построений, а с другой стороны, указываем условие, ограничивающее применимость этих построений. Чтобы подчеркнуть значительность данного ограничения, покажем, например, что даже такой специально дискретный инструмент, как счеты, не удовлетворяет ему безоговорочно.

Для каждой костяшки на счетах различают два положения — левое и правое. Представляется очевидным, что одна и та же костяшка не может находиться сразу в левом и в правом положениях. На самом деле это не так. Костяшка может оказаться на стыке левого и правого положении, и в этом случае утверждение, что она находится одновременно в левом и в правом положениях, не представляется невозможным. Чтобы счеты были дискретными, вычислитель должен избегать установки костяшек в неразличимые положения. В более совершенных вычислительных устройствах дискретность элементов достигается тем, что их неразличимые положения неустойчивы.

Безусловная различимость не исключает возможности рассмотрения объектов, для которых присущность некоторых признаков не определена. При этом разбиение относительно признака должно производиться не на два, а на три класса: «присуще», «неприсуще», «неопределено». Если каждый объект отнесен только к одному из этих классов, то условие различимости соблюдено, двусмысленность исключена. Разбиение на три класса означает, что для переменных, которыми представлены признаки, допустимы три значения. В связи с этим говорит: «трехзначная ситуация», «трехзначная логика».

Разбиение на три класса может быть, разумеется, осуществлено и средствами двузначной логики, но в два приема. Например, сначала отделяется класс объектов, для которых присущность данного признака не определена, а затем остальное разбивается на два класса – «присуще», «неприсуще». Это но существу моделирование трехзначной ситуации в двузначной логике.

3. ЗНАКИ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ФОРМУЛАХ

Введя буквенное обозначение терминов силлогистики. Аристотель положил начало тому, что впоследствии было названо алгеброй. Долгое время алгебра развивалась и использовалась только в связи с числами, однако уже Лейбниц вполне осознал ее универсальный характер. Сегодня, располагая алгеброй Буля, мы в состоянии завершить начатое Аристотелем заменив словесный текст, связывающий буквы-термины в предложениях силлогистики, соответствующими знаками, придать этим предложениям вид формул, которые можно комбинировать и преобразовывать в необходимом направлении по правилам алгебры.

Кроме букв, которые служат для обозначения переменных, представляющих признаки, мы используем в формулах знаки четырех родов:

1) знак тождества,
2) комбинационные (операционные) знаки,
3) знаки-значения,
4) скобки.

Знак *тождества* $\equiv$ буквально означает «то же самое». Объекты, связанные отношением тождества, неразличимы в пределах рассматриваемой системы признаков, т. е. представляют собой один и тот же единственный объект. Два выражения, между которыми поставлен знак тождества, рассматриваются как (может быть различные по виду) обозначения в точности одного и того же, являются синонимами. Например, если дано, что $x \equiv y$, то это значит, что признак, обозначенный буквой x на равных правах может обозначаться буквой y. (Заметим, кстати, что различные, т. е. не тождественные объекты в пределах одного рассуждения обозначать одной и той же буквой недопустимо, т. е. $\mathrm{x} \equiv \mathrm{x}$.)

Формулы, содержащие знак тождества, принципиально отличаются от формул, не содержащих этого знака. Проводя параллель между словесными выражениями и формулами, можно сказать, что формулы, содержащие знак тождества, соответствуют законченным предложениям, выражающим определенные утверждения о тех объектах, о которых в них идет речь, а формулы, не содержанию знака тождества, соответствуют фразам, высказываниям, т. е. частям предложения, называющим объекты, но ничего не утверждающим.

Формула, не содержащая знака тождества, представляет собой переменную, которая принимает то или иное значение в зависимости от значений, присвоенных входящим в нее буквам. Формула, содержащая знак тождества, является константой, которую мы обозначим цифрой 1, истолковывая ее значение в смысле слов «верно», «да», «есть». При этом предполагается, что знаком тождества не могут быть соединены нетождественные выражения.

В качестве комбинационных знаков мы используем в основном знаки булевой алгебры: знак *инверсии* (в виде черты над инвертируемым выражением), который для двузначных переменных будет служить также знаком отрицания, знак *конъюнкции* $\wedge$ и знак *дизъюнкции* $\vee$. Эти знаки мы рассматриваем, с одной стороны, как эквиваленты служебных слов (связок) словесного языка, а с другой стороны, как обозначения операций, выполнение которых над значениями, присвоенными входящим в формулу буквам, приводит к соответствующему значению принимаемому этой формулой. Первый подход удобен в отношении трансляции словесных выражений на язык формул и обратного истолкования формул на словесном языке. Второй подход имеет в виду математическую обработку формул. Ясно, что оба подхода лишь по-разному раскрывают единую сущность формул. Например, формула $x \wedge y$ согласно первому истолкованию выражает признак – комбинацию признаков x и y, присущность которого тождественна присущности признаков x и y вместе, а согласно второму истолкованию она обозначает переменную, которая принимает значение 1 лишь при условии, что это значение присвоено как переменной x, так и переменной y.

Работая с двузначными переменными, мы будем использовать перечисленные выше знаки в строгом соответствии с тем, как они определены в булевой алгебре, т. е. безоговорочно принимая все тождества и правила преобразования формул, имеющиеся в этой алгебре. При использовании переменных большей значности будет произведено соответствующее доопределение функций, выполняемых знаками.

Помимо знаков булевой алгебры мы будем ради компактности формул применять другие комбинационные знаки, предварительно определив их смысл при помощи тождественных выражений, построенных с использованием только знаков булевой алгебры. Примером такого определения может служить тождество, определяющее смысл знака эквивалентности:

$$(x = y) \equiv x \wedge y \vee x \wedge y.$$

Значения, принимаемые двузначными переменными, мы обозначаем цифрами 0 и 1. Значение 0 считается младшим, т. е. не существенным как член дизъюнкции: $x \vee 0 \equiv x$. Формула, тождественная 0, выражает невозможный (в смысле постулата Аристотеля об однозначной различимости) признак: $x \wedge \overline{x} \equiv 0$. Формула, принимающая значение 0 на объекте, заданном некоторой комбинаций признаков, выражает признак, не присущий этому объекту. Таким образом, значение 0 ассоциируется со значением слов „нет", „неверно". Значение 1 противоположно (инверсно) значению 0, т. е. $1 \equiv \overline{0}$.

Скобки в наших формулах будут играть их обычную роль, указывая порядок выполнения операций. Чтобы сократить количество скобок в формулах, мы условимся не писать их в тех случаях, когда выполнение конъюнкции предшествует выполнению дизъюнкции.

4. СТРУКТУРА РАССМАТРИВАЕМОГО КЛАССА

Признавая мир бесконечным, мы способны различить в нем все же лишь конечное число объектов. Эти объекты соответствуют всевозможным комбинациям конечного числа признаков, по которым осуществляется различение.

Будем исходить из того, что основу многообразия объектов рассматриваемого класса u составляют независимые признаки $u_1, u_2, \ldots, u_n$, называемые далее *первичными признаками*. Допустив, что для любого объекта из класса u определена присущность или неприсущность ему каждого первичного признака или его инверсии, мы можем представить все возможные в данном классе объекты булевыми функциями двузначных переменных $u_1, u_2, \ldots, u_n$, соответствующих одноименным первичным признакам. Так как существует 2^{2^n} различных булевых функций n переменных, причем одна функция — константа 0 — соответствует невозможному объекту, то всего в классе u различимы $2^{2^n} - 1$ объектов, в число которых входит также класс u в целом.

Мы будем называть наиболее конкретными объектами или *видами** такие объекты, для которых имеет место присущность каждого первичного признака или его инверсии. Эти объекты будут представлены элементарными конъюнкциями ранга n, содержащими в качестве членов переменные u_i или $\overline{u}_i$ индекс i принимает значения $1, 2, \ldots, n$). В системе с n первичными признаками имеется 2^n различных видов.

Так как любая булева функция n переменных представима в совершенной дизъюнктивной нормальной форме, т.е. в виде дизъюнкции элементар-

* Употребление здесь слова «вид» вместо используемого обычно слова «индивидум» подчеркивает относительность наибольшей конкретности. Вид является вполне конкретным объектом лишь относительно n рассматриваемых первичных признаков. Объекты, составляющие вид, при данном рассмотрении неразличимы, так как признаки, по которым их можно различить, не учтены в числе рассматриваемых признаков. Однако имеется возможность дальнейшего уточнения (конкретизации) системы путем увеличения числа n.

ных конъюнкций ранга n, то ясно, что все объекты рассматриваемой системы представляют собой классы, объединяющие те или иные совокупности различных видов. В частности, класс u содержит в себе все 2^n видов, а классы u_1, $\overline{u}_1$, u_2, $\overline{u}_2$, …, u_n, $\overline{u}_n$, содержат каждый в точности половину этого числа, т. е. 2^{n-1} видов.

Рассматриваемая система объектов может быть удобно интерпретирована в n-мерном двоичном пространстве (на n-мерном единичном кубе). Переменные u_1, u_2, …, u_n интерпретируются как координаты этого простран-ства, для которых допустимы два значения: 0 и 1. Каждой из 2^n точек двоичного n-мерного пространства соответствует одно из 2^n различных значений n-элементного двоичного вектора u_1, u_2, …, u_n. Каждое значение этого вектора однозначно определяет значение, принимаемое в соответ-ствующей точке любой из $2^{2^n}-1$ булевых функций n-переменных, которыми представлены рассматриваемые объекты. Таким образом, эти функции являются функциями точек двоичного n-мерного пространства. В частности, функция, выраженная элементарной конъюнкцией ранга n, принимает значение 1 в единственной точке, определяемой значением вектора u_1, u_2, …, u_n, которое содержит единицы в элементах, входящих в конъюнкцию без знака инверсии, и нули в элементах, входящих в конъюнкцию под знаком инверсии. В этом смысле каждой такой конъюнкции и, следовательно, каждому виду соответствует своя точка в двоичном пространстве. Поскольку все другие объекты являются классами видов, то они отображаются в соответствующие совокупности точек.

5. ВЫРАЖЕНИЕ ОТНОШЕНИЙ

Впредь мы будем обозначать рассматриваемые объекты и двузначные переменные – функции первичных переменных u_1, u_2, …, u_n, представляющие эти объекты, буквами x, y, z, … . Переменные x, y, z, … определены во всех точках n-мерного двоичного пространства и в каждой его точке принимают значение 0 или 1.

Так как переменные x, y, z, … не независимы, то имеет смысл говорить об *отношениях*, которыми они связаны друг с другом, и попытаться выразить эти отношения в виде формул.

Всякое отношение выражает определенную упорядоченность представленных переменными объектов. Если говорят, что рассматриваемые объекты связаны данным отношением (находятся в данном отношении), то это означает, что они удовлетворяют соответствующему порядку, что им присуща определяемая данным отношением упорядоченность.

Следовательно, отношение можно трактовать как признак, которым может обладать или не обладать рассматриваемая система объектов. Этот признак можно выразить формулой, которая будет принимать значение 1 в том случае, если подставленные в нее конкретные переменные (функции) действительно связаны данным отношением, а в противном случае будет принимать значение 0.

В качестве примера мы напишем формулу, выражающую отношение включения. Применительно к системе объектов, построенной на основе первичных признаков из класса u, отношение «включение x в y» означает, что в классе u нет такого объекта, которому присуще x, но не присуще y. Эту ситуацию выражает формула

$$\overline{\bigvee_u}(x \wedge \overline{y}),$$

в которой знак $\bigvee_u$. надо понимать как дизъюнкцию, распространенную на весь класс u, т. е. значение, принимаемое этой дизъюнкцией, определяется как дизъюнкция 2^n значений, принимаемых выражением, стоящим под знаком $\bigvee_u$ в точках n-мерного двоичного пространства.

Воспользовавшись правилом де Моргана, формулу отношения включения можно преобразовать к виду

$$\bigwedge_u(\overline{x} \vee y).$$

Здесь знак $\bigwedge_u$ означает конъюнкцию, которой охвачен весь класс u.

В случае, если переменные x и y заданы как функции первичных переменных $u_1, u_2, \dots, u_n$, или если одна из этих переменных представлена формулой, содержащей другую переменную, то факт наличия или отсутствия отношения включения определяется просто: удовлетворяющие отношению функции x и y, будучи подставлены в формулу $\overline{x} \vee y$, обращают ее в константу 1. Например, пусть $x \equiv u_1 \wedge u_2$, $y \equiv u_2$.

В этом случае имеем

$$\overline{x} \vee y \equiv \overline{u_1 \wedge u_2} \vee u_2 \equiv \overline{u}_1 \vee \overline{u}_2 \vee u_2 \equiv 1.$$

На практике, к сожалению, далеко не всегда имеется аналитическое описание объектов, и поэтому анализ отношений путем прямого перебора всех точек системы, подобного указываемому формулой $\bigwedge_u(\overline{x} \vee y)$, не лишен смысла.

Отношение включения обозначают обычно знаком $\subset$ или $\supset$, например: $x \subset y$, $x \supset y$. Однако не всегда ясно, что выражает этот знак – то ли утверждение, что x действительно входит в y (y включает x), равносильное тождеству $\bigwedge_u(\overline{x} \vee y) \equiv 1$, то ли признак данного отношения, который может принимать разные значения в зависимости от конкретных переменных x и y, что равносильно формуле $\bigwedge_u(x \vee y)$. Чтобы избежать этой неопределенности, условимся, что запись $x \subset y$ или $x \supset y$ всегда равносильна формуле $\bigwedge_u(\overline{x} \vee y)$. и расценивается как сокращенное обозначение этой формулы. Данного правила мы будем придерживаться также при использовании сокращенных обозначений других отношений. Исключение составляет знак тождества (см. п. 3).

6. БУКВАЛЬНЫЙ СМЫСЛ ПРЕДЛОЖЕНИЙ СИЛЛОГИСТИКИ

Силлогистика рассматривает четыре вида предложений, для которых установлены следующие буквенные обозначения:

Axy – «Всякое x есть y»,
Exy – «Никакое x не есть y»,
Ixy – «Некоторое x есть y»,
Oxy – «Некоторое x не есть y».

Очевидно, что эти предложения формулируют определенные отношения между объектами, о которых в них идет речь. Их можно понимать двояко: как утверждения, что для конкретных объектов, обозначенных буквами x и

y, формулируемое отношение имеет место, т. е. что эти объекты связаны этим отношением; и как фразы, выражающие смысл того или иного отношения применительно к произвольным объектам x и y, конкретные виды которых могут удовлетворять этому отношению или не удовлетворять ему.

В соответствии с установленным выше правилом мы принимаем второе понимание, т. е. будем расценивать обозначения Axy, Exy, Ixy, Oxy и соответствующие им словесные выражения как формулы-фазы, принимающие определенные значения в конкретных ситуациях. Чтобы выразить соответствующее утверждение, к словесной формулировке отношения следует присоединить дополнительные слова, утверждающие, что указанные объекты действительно связаны данным отношением, а при использовании буквенного обозначения написать, что оно тождественно 1, например

$$Axy \equiv 1.$$

Нашей ближайшей задачей будет выявление и представление формулами отношений, соответствующих буквальному смыслу предложений силлогистики.

Вначале мы займемся предложением «Некоторое x есть y». Это предложение выражает ситуацию, заключающуюся в том, что из объектов, обладающих признаком x, по меньшей мере один обладает признаком y. Поскольку речь идет о «некотором x», то предполагается, что объекты, обладающие признаком x, даны.

Чтобы выяснить, удовлетворяют ли рассматриваемому отношению какие-то конкретные признаки x и y, надо проверить все объекты, обладающие признаком x, на присущность им признака y. Если хотя бы один из этих объектов обладает признаком y, то отношение соблюдено, т. е. $Ixy \equiv 1$. Если же признак y не присущ ни одному из объектов класса x, то признаки x и y рассматриваемым отношением не связаны, т. е. $Ixy \equiv 0$. Этим, однако, не исчерпываются все возможные ситуации – ведь не исключено, что в качестве x будет задан признак, не присущий ни одному объекту, признак пустого класса. В этом случае нельзя считать отношение выполненным и нельзя считать, что оно не выполняется. Формулировка отношения такова, что объекты, обладающие признаком x, подразумеваются имеющимися, и она не содержит никаких указаний, как поступать в том случае, когда этих объектов нет. Короче говоря, для такого случая рассматриваемое отношение не определено, не имеет смысла. В этом случае мы должны приписать формуле Ixy некоторое третье, отличное от 0 и 1 значение, выражающее неопределенность. Мы обозначим это значение буквой i – indefinite.

Итак, буквальное истолкование предложения «Некоторое x есть y» приводит к трехзначному отношению двузначных переменных x и y.

Аналогично обстоит дело с остальными предложениями. Например, предложение «Никакое x не есть y» выражает отношение, удовлетворяющееся в том случае, когда даны объекты, обладающие признаком x, и ни один из них не обладает признаком y. Это отношение не удовлетворяется, если есть хотя бы один объект, которому присущи признаки x и y вместе. Наконец, оно не определено, если нет объектов, обладающих признаком x.

На основании изложенных рассуждений буквальный смысл предложений силлогистики можно выразить следующими формулами:

$$A^{Б}xy \equiv \bigwedge_x y,$$

$$E^{Б}xy \equiv \bigwedge_x y,$$

$$I^{Б}xy \equiv \bigvee_x y,$$

$$O^{Б}xy \equiv \bigvee_x y,$$

Буквы A, E, I, O, обозначающие предложения, написаны с индексом Б, так как имеется в виду буквальное истолкование предложений, которое, как далее выяснится, не тождественно истолкованию их, принятому в силлогистике.

Знаки $\bigwedge_x$ и $\bigvee_x$ обозначают соответственно конъюнкцию и дизъюнкцию, распространенные на все объекты класса x. Если класс x пуст, то независимо от выражения, стоящего под этими знаками, на основании предыдущих рассуждений принимаем

$$(x \equiv 0) \wedge \bigwedge_x y \equiv (x \equiv 0) \wedge \bigvee_x y \equiv i.$$

Заметим, что здесь мы расходимся с общепринятой теорией, которая «по определению» полагает конъюнкцию пустого множества членов тождественной 1, а соответствующую дизъюнкцию – тождественной 0 {10, стр. 209].

Для такого определения не видно основательных причин, кроме стремления любой ценой сохранить двузначное исчисление. Для нас такое определение неприемлемо, так как допустив, что

$$(x \equiv 0) \wedge \bigwedge_x y \equiv 1, \quad (x \equiv 0) \wedge \bigvee_x y \equiv 0,$$

мы перечеркнем все предыдущее построение, отождествив отношения, выраженные предложениями силлогистики, с отношением включения и его отрицанием, которые при этом допущении можно представить в виде

$$(x \subset y) \equiv \bigwedge_x y, \quad \overline{x \subset y} \equiv \bigvee_x \overline{y}.$$

Мы не станем сейчас заниматься дальнейшим обсуждением данной проблемы, но отметим, что наличие ее свидетельствует о недостаточной проработке вопросов, связанных с понятием пустого класса в современной логике. По-видимому, этим может быть объяснено сложившееся в ней представление о чуждости понятия пустого класса аристотелевой силлогистике.

7. ЭЛЕМЕНТЫ ТРЕХЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

Прежде чем продолжить исследование предложений силлогистики, мы кратко охарактеризуем трехзначное исчисление, которое будет далее использовано, и произведем необходимое доопределение применяемых комбинационных знаков.

Первым (младшим) значением в рассматриваемой трехзначной логике, как и в двузначной логике, будет 0 («нет»), вторым – i («неопределенность»), последним – 1 («да»).

Обозначим произвольное значение буквой α_j, где в качестве индекса j допустимы числа 1, 2, 3, причем $\alpha_1 \equiv 0$, $\alpha_2 \equiv i$, $\alpha_3 \equiv 1$.

Операцию инверсии, используя это обозначение, определим формулой

$$\overline{\alpha}_j \equiv \alpha_{4-j}.$$

Операции конъюнкции и дизъюнкции над рядом произвольных значений $\alpha_j, \alpha_k, \ldots, \alpha_t$, где в качестве индексов $j, k, ..., t$ употребляются числа 1, 2, 3, определяют соответственно формулы

$$\Lambda\,(\alpha_j, \alpha_k, \ldots, \alpha_t) \equiv \alpha_{\min}\,(j, k, ..., t),$$

$$\mathrm{V}\,(\alpha_j, \alpha_k, \ldots, \alpha_t) \equiv \alpha_{\max}\,(j, k, ..., t).$$

Операции инверсии, конъюнкции и дизъюнкции не составляют функционально полной в трехзначной логике системы – они не обеспечивают возможности построения функций, сопоставляющих значению i отличное от него значение. Поэтому возникает необходимость дополнения данной системы новыми операциями.

В качестве этих операций мы выбираем операции выделения двузначных компонент трехзначной переменной [11]. Двузначные компоненты трехзначной переменной x мы будем обозначать буквой x с соответствующими индексами: x^0 – нуль-компонента, x^i – i-компонента, x^1 – единичная компонента. Компонента x^j принимает значение 1, если значение, присвоенное переменной x, совпадает со значением индекса j, в противном случае компонента принимает значение 0.

Таблица 1

x	$\overline{x}$	x^0	x^i	x^1
0	1	1	0	0
i	i	0	1	0
1	0	0	0	1

Таблица 2

$x \wedge y$

x \ y	0	i	1
0	0	0	0
i	0	i	i
1	0	i	1

Таблица 3

$x \vee y$

x \ y	0	i	1
0	0	i	1
i	i	i	1
1	1	1	1

Операции инверсии, выделения компонент, же операции конъюнкции и дизъюнкции для двух операндов представляются табл. 1–3.

Можно показать, что дополненная система операций функционально полна в трехзначной логике при наличии константы i. Произвольная трехзначная функция x при использовании этой системы операций может быть представлена в форме

$$x \equiv x^1 \vee i \wedge x^i,$$

где компоненты x^1 и x^i – булевы функции двузначных компонент трехзначных переменных – аргументов функции x.

Относительно операций конъюнкции, дизъюнкции и инверсии над трехзначными переменными остается в силе подавляющее большинство тождеств, связанных с этими операциями в булевой алгебре, в частности: идемпотентность, коммутативность и ассоциативность конъюнкции и дизъюнкции, дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции и дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции, правила де Моргана, правила поглощения, правило двойной инверсии, а также следующие тождества с константами [11]:

$$\overline{0} \equiv 1, \quad x \wedge 0 \equiv 0, \quad x \vee 0 \equiv x,$$
$$\overline{1} \equiv 0, \quad x \wedge 1 \equiv x, \quad x \vee 1 \equiv 1.$$

Вместе с тем в случае трехзначных переменных недействительны такие важные тождества булевой алгебры как

$$x \wedge \overline{x} \equiv 0,$$

выражающее закон противоречия, если x – двузначная переменная, и

$$x \wedge \overline{x} \equiv 1,$$

являющееся формулой закона исключенного третьего.

Дело в том, что с введением третьего значения операция инверсии утратила присущий ей в двузначной логике смысл отрицания – черта над буквой, обозначающей трехзначную переменную, не равнозначна слову „не" русского языка. Это видно уже из того, что $\overline{i} \equiv i$, а ведь „не i”, согласно постулату Аристотеля, не может быть тождественно i.

Двузначные переменные x и $\overline{x}$ связаны отношением контрадикторности, а трехзначные переменные x и $\overline{x}$ связаны отношением контрарности их единичных, а также нулевых компонент.

При введении третьего значения каждая операция булевой алгебры может быть доопределена несколькими различными путями, т. е. каждой булевой операции соответствует класс операций над трехзначными переменными, которые вырождаются в эту операцию с вырождением трехзначных переменных в двузначные. В основу принятых нами определений операций трехзначной логики были положены: свойства инверсии обращать значения, т. е. заменять его противоположным в ряду старшинства значением, свойство конъюнкции выделять младшее из данных значение и свойство дизъюнкции выделять старшее значение. При этом остались в сохранности почти все тождества, определяющие свойства этих операций в булевой алгебре.

В двузначной логике буква, обозначающая некоторый признак, рассматривается вместе с тем как высказывание о наличии этого признака:

$$x \equiv (x = 1),$$

а та же буква со знаком инверсии истолковывается как отрицание этого высказывания, что равносильно высказыванию об отсутствии обозначенного данной буквой признака:

$$\overline{x} \equiv (\overline{x = 1}) \equiv (x = 0).$$

В трехзначной логике мы уже не вправе считать, $x \equiv (x = 1)$, потому что x – трехзначная переменная, а $(x = 1)$ – двузначная. Относительно трехзначной переменной возможны следующие шесть двузначных высказываний (знаком $\neq$ обозначена операция неэквивалентности, т. е. $(x \neq y) \equiv (\overline{x = y})$:

$x = 1$ – признак x имеет место;

$x \neq 1$ – признак x или не имеет места, или не имеет смысла;

$x = i$ – признак x не имеет смысла, не определен в рассматриваемой ситуации;

$x \neq i$ – признак x имеет смысл, но о наличии или об отсутствии его ничего не сказано;

$x = 0$ – признак x не имеет места;

$x \neq 0$ – признак x или имеет место, или не имеет смысла.

Закон противоречия для трехзначной логики, используя описанную систему операций, можно выразить формулой

$$x^j \wedge x^k \equiv 0, \quad \text{где} \quad (\mathrm{j} \neq \mathrm{k}) \equiv 1.$$

Эта формула утверждает, что трехзначная переменная не может принимать два (тем более три) различных значения вместе, т. е. представляет обобщение постулата Аристотеля о безусловной различимости на случай трехзначной логики.

Для всякой двузначной компоненты x^j трехзначной переменной сохраняет силу соответствующий закон двузначной логики

$$x^j \wedge \overline{x^j} \equiv 0.$$

Двузначная логика, естественно, полностью входит в трехзначную как логика компонент.

Закона исключенного третьего в трехзначной логике, разумеется, быть не может. Его замещает закон исключенного четвертого, выражающийся тождеством

$$x^0 \vee x^j \vee x^1 \equiv 1.$$

Интерес к трехзначной логике появился в 20-х годах нашего века, на которые приходятся публикации первых исследований в этой области. Однако еще в XIV веке Уильям Оккам [2, стр. 143] разрабатывал систему трехзначной логики, которая в части истолкования значений и приписанного им старшинства идентична только что рассмотренной.

8. ОТНОШЕНИЯ ПРИСУЩНОСТИ И ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

Формулы $\bigwedge_x y$, $\bigwedge_x \overline{y}$, $\bigvee_x y$, $\bigvee_x \overline{y}$, полученные в результате буквального истолкования предложений силлогистики, как уже было сказано, выражают нечто отличное от того смысла, который приписывается этим предложениям в силлогистике. Несмотря на это, они заслуживают не меньшего внимания, чем формулы, точно выражающие указанный смысл.

Формула $\bigwedge_x y$ принимает значение 1, если в рассматриваемом двоичном пространстве имеется по меньшей мере одна точка, в которой переменная x принимает значение 1, и если в этом пространстве нет ни одной точки, в которой переменная x принимает значение 1, а переменная y принимает значение 0. (Здесь как и прежде, x и y – двузначные переменные.) Такая ситуация, точное описание которой дается формулой

$$\left(\bigwedge_x y\right)^1 \equiv \bigvee_u x \wedge \overline{\bigvee_u} \, (x \wedge \overline{y}),$$

выражается обычно словами „Признак y присущ объекту x", или „Объект x принадлежит к классу y".

Таким образом, единичная компонента трехзначной переменной $\bigwedge_x y$ равносильна утверждению принадлежности x к y.

Используя знак отношения принадлежности $\in$, можно представить эту компоненту следующей формулой:

$$\left(\underset{x}{\Lambda} y\right)^1 \equiv ((x \in y) = 1) \equiv (x \in y)^1.$$

Известно, что отношение принадлежности $x \in y$ имеет смысл лишь при условии, что класс x не пуст. В том случае, когда x пусто, отношение $x \in y$ не определено. Но как раз этому случаю соответствует i-я компонента формулы $\underset{x}{\Lambda} y$:

$$\left(\underset{x}{\Lambda} y\right)^i \equiv \overline{\underset{u}{\mathrm{V}}} x.$$

По-видимому, нулевая компонента формулы $\underset{x}{\Lambda} y$ должна утверждать непринадлежность x к y. Чтобы убедиться в этом, представим переменную $\underset{x}{\Lambda} y$, используя выражения ее единичной и i-й компонент, и найдем выражение нулевой компоненты этой переменной

$$\underset{x}{\Lambda} y \equiv \left(\underset{x}{\Lambda} y\right)^1 \vee i \wedge \left(\underset{x}{\Lambda} y\right)^i \equiv \underset{u}{\mathrm{V}} x \wedge \overline{\underset{u}{\mathrm{V}}}\,(x \wedge \bar{y}) \vee i \wedge \overline{\underset{u}{\mathrm{V}}} x \equiv \underset{u}{\Lambda}\,(\bar{x} \vee y) \wedge \left(i \vee \underset{u}{\mathrm{V}} x\right),$$

$$\left(\underset{x}{\Lambda} y\right)^0 \equiv \left(\overline{\underset{x}{\Lambda}} y\right)^1 \equiv \underset{u}{\mathrm{V}}\,(x \wedge \bar{y}).$$

Полученная формула нулевой компоненты переменной $\underset{x}{\Lambda} y$ показывает, что эта компонента действительно определяет ситуацию, которая обычно выражается словами „x не принадлежит к y" и заключается в том, что имеется по меньшей, мере один объект, обладающий признаком x и не обладающий признаком y. Пользуясь знаком отношения непринадлежности $\bar{\in}$, можно представить рассматриваемую нулевую компоненту формулой

$$\left(\underset{x}{\Lambda} y\right)^0 \equiv ((x \mathrel{\bar{\in}} y) = 1) \equiv (x \mathrel{\bar{\in}} y)^1.$$

Мы показали, что формула $\underset{x}{\Lambda} y$ выражает отношение принадлежности $x \in y$, установив при этом, что данное отношение трехзначно. Обычно отношение принадлежности $x \in y$ принято рассматривать как двузначное с оговоркой, что класс x не пуст, причем формула отношения непринадлежности $x \mathrel{\bar{\in}} y$ отождествляется с отрицанием формулы $x \in y$. Так как пустые классы при этом вовсе не исключены, то оговорка о непустости класса x означает, что перед тем как выяснить, выполняется отношение $x \in y$ или нет, необходимо всякий раз убедиться в том, что класс x действительно не пуст.

Указанное неудобство можно обойти, придав двузначному отношению принадлежности несколько иной смысл, а именно, приняв в качестве формулы, определяющей это отношение, единичную компоненту формулы трехзначного отношения $x \in y$. Обозначив такое двузначное отношение принадлежности знаком $\in^1$, имеем

$$(x \in^1 y) \equiv (x \in y)^1 \equiv \left(\underset{x}{\Lambda} y\right)^1 \equiv \underset{u}{\mathrm{V}} x \wedge \overline{\underset{u}{\mathrm{V}}}\,(x \wedge \bar{y}),$$

$$(x \notin^1 y) \equiv \overline{(x \in y)^1} \equiv \overline{\left(\underset{x}{\Lambda} y\right)^1} \equiv \overline{\underset{u}{\mathrm{V}}} x \wedge \underset{u}{\mathrm{V}}\,(x \wedge \bar{y}).$$

Такое определение двузначного отношения принадлежности аналогично определению отношения включения

$$(x \subset y) \equiv \overline{\left(\underset{x}{\mathrm{V}} \bar{y}\right)^1} \equiv \overline{(x \in y)^0} \equiv \underset{u}{\Lambda}\,(\bar{x} \vee y),$$

$$(x \not\subset y) \equiv \left(\underset{x}{\mathrm{V}} \bar{y}\right)^1 \equiv (x \in y)^0 \equiv \underset{u}{\mathrm{V}}\,(x \wedge \bar{y}).$$

Можно показать, что между отношениями принадлежности и включения имеет место следующая связь:

$$(x \notin^1 y) \equiv (x \subset y) \wedge (x \not\subset \bar{y}), \quad (x \subset y) \equiv (x \in^1 y) \vee (x \notin^1 \bar{y}).$$

Заметим, что отношение включения не обратно отношению принадлежности, как это иногда утверждают [12, стр. 112]. Отношение $x \subset y$ („включение x в y") обратно отношению $y \subset x$ („включение y в x"), а отношение $x \in y$ („принадлежность x к y") обратно отношению $y \in x$ („принадлежность y к x", „присущность признака x классу y").

Формулы $\underset{x}{\Lambda}\bar{y}$ и $\underset{x}{\mathrm{V}}y$ и их компоненты можно истолковать в духе изложенного выше, связав их с отношением $x \in \bar{y}$ („антипринадлежность x к y") и $\overline{x \subset \bar{y}}$ („неантивключение x в y").

9. ТОЧНОЕ ВЫРАЖЕНИЕ СМЫСЛА ПРЕДЛОЖЕНИЙ СИЛЛОГИСТИКИ

Под смыслом, приписанным отношениям A, E, I, O в силлогистике, мы понимаем смысл этих отношений, выводимый из законов, которыми они связаны в силлогистике. Имеются в виду законы:

обращения –

$$Exy \equiv Eyx, \quad Ixy \equiv Iyx;$$

подчинения –

$$Ixy \equiv Ixy \vee Axy; \quad Oxy \equiv Oxy \vee Exy;$$

контрадикторности –

$$Axy \equiv \bar{O}xy\ ; Exy \equiv \bar{I}\,xy;$$

контрарности –

$$Axy \wedge Exy \equiv 0;$$

подконтрарности –

$$Ixy \vee Oxy \equiv 1;$$

а также правила силлогистического вывода –

$$Axy \equiv Axz \vee Axy \wedge Ayz, \quad Ixz \equiv Ixz \vee Ixy \wedge Ayz.$$

При попытке применить данные законы к формулам, полученным в результате буквального истолкования предложений, которыми выражены отношения $A, E, I, O,$ мы прежде всего обнаруживаем, что наши формулы не удовлетворяют законам обращения. Действительно, как результат истолкования предложения, которым выражено отношение Exy, получена формула

$$E^{Б}xy \equiv \underset{x}{\Lambda}\bar{y} \equiv \underset{u}{\Lambda}\,(\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge \left(i \vee \underset{u}{\mathrm{V}}x\right).$$

Аналогичная формула предложения, выражающего отношение Eyx, имеет вид

$$E^{Б}yx \equiv \underset{y}{\Lambda}\bar{x} \equiv \underset{u}{\Lambda}\,(\bar{x} \vee \bar{y}) \vee \left(i \vee \underset{u}{\mathrm{V}}x\right).$$

Легко видеть, что эти формулы, вопреки закону обращения, не тождественны. Чтобы они удовлетворяла этому закону, мы должны придать каждой из них способность выражать как отношение $E^{Б}yx$, так и отношение $E^{Б}yx$. Такой способностью обладает конъюнкция этих формул, которую мы обозначим $E^{A}yx$ (индекс A указывает на то, что отношение истолковывается в духе Аристотеля):

$$E^A xy \equiv E^A yx \equiv \bigwedge_x \bar{y} \wedge \bigwedge_y \bar{x} \equiv \bigwedge_{\text{и}} (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge \left(i \vee \bigvee_{\text{и}} x \wedge \bigvee_{\text{и}} y\right) \equiv$$

$$\equiv \bigwedge_{\text{и}} (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge \bigvee_{\text{и}} x \wedge \bigvee_{\text{и}} y \vee i \wedge \left(\overline{\bigvee}_{\text{и}} x \vee \overline{\bigvee}_{\text{и}} y\right).$$

Повторение аналогичных рассуждений применительно к формулам $\bigvee_x y$ и $\bigvee_y x$, представляющим предложения $I^Б xy$ и $I^Б yx$, приводит к следующему выражению отношения I^A:

$$I^A xy \equiv I^A yx \equiv \bigvee_x y \vee \bigvee_y x \equiv \bigvee_{\text{и}} (x \wedge y) \wedge \left(i \vee \bigvee_{\text{и}} x \wedge \bigvee_{\text{и}} y\right) \equiv$$

$$\equiv \bigvee_{\text{и}} (x \wedge y) \vee i \wedge \left(\overline{\bigvee}_{\text{и}} x \vee \overline{\bigvee}_{\text{и}} y\right).$$

Формулы отношений A^A и O^A могут быть получены инверсией переменной у в формулах E^A и I^A (это следует из сравнения формул $A^Б$, $O^Б$ с $E^Б$, $I^Б$):

$$A^A xy \equiv \bigwedge_x y \wedge \bigwedge_{\bar{y}} \bar{x} \equiv \bigwedge_{\text{и}} (\bar{x} \vee y) \wedge \left(i \vee \bigvee_{\text{и}} x \wedge \bigvee_{\text{и}} \bar{y}\right) \equiv$$

$$\equiv \bigwedge_{\text{и}} (\bar{x} \vee y) \wedge \bigvee_{\text{и}} x \wedge \bigvee_{\text{и}} \bar{y} \vee i \wedge \left(\overline{\bigvee}_{\text{и}} x \vee \overline{\bigvee}_{\text{и}} y\right),$$

$$O^A xy \equiv \bigvee_x \bar{y} \vee \bigvee_{\bar{y}} x \equiv \bigvee_{\text{и}} (x \wedge \bar{y}) \wedge \left(i \vee \bigvee_{\text{и}} x \wedge \bigvee_{\text{и}} \bar{y}\right) \equiv$$

$$\equiv \bigvee_{\text{и}} (x \wedge \bar{y}) \wedge i \wedge \left(\overline{\bigvee}_{\text{и}} x \vee \overline{\bigvee}_{\text{и}} y\right).$$

При осуществлении проверки того, насколько точно формулы A^A, E^A, I^A, O^A удовлетворяют законам силлогистики, мы должны иметь в виду, что эти формулы выражают трехзначные отношения, в то время как законы силлогистики сформулированы для отношении A, E, I, O, как для двузначных. Поскольку функции A, E, I, O принимают значение 1 при условии, что соответствующее отношение имеет место, то их следует отождествить с единичными компонентами трехзначных функций A^A, E^A, I^A, O^A. При этом приписывание функциям A, E, I, O значения 0 будет означать, что соответствующее отношение или не имеет места, или не имеет смысла. Таким образом, устанавливаем следующее соответствие:

$$Axy \equiv (A^A xy)^1 \equiv \bigwedge_{\text{и}} (\bar{x} \vee y) \wedge \bigvee_{\text{и}} x \wedge \bigvee_{\text{и}} \bar{y},$$

$$Exy \equiv (E^A xy)^1 \equiv \bigwedge_{\text{и}} (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge \bigvee_{\text{и}} x \wedge \bigvee_{\text{и}} y,$$

$$Ixy \equiv (I^A xy)^1 \equiv \bigvee_{\text{и}} (x \wedge y),$$

$$Oxy \equiv (O^A xy)^1 \equiv \bigvee_{\text{и}} (x \wedge \bar{y}),$$

Подставляя эти выражения в формулы законов силлогистики, нетрудно убедиться, что они удовлетворяют всем законам, за исключением законов контрадикторности и закона подконтрарности, причем из двух условий, определяющих контрадикторность контрарности и подконтрарности, не удовлетворяется подконтрарность

$$Axy \wedge Oxy \equiv \bigwedge_{\text{и}} (\bar{x} \vee y) \wedge \bigvee_{\text{и}} x \wedge \bigvee_{\text{и}} \bar{y} \vee \bigvee_{\text{и}} (x \wedge \bar{y}), \not\equiv 1,$$

$$Exy \wedge Ixy \equiv \bigwedge_{\text{и}} (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge \bigvee_{\text{и}} x \wedge \bigvee_{\text{и}} x \vee \bigvee_{\text{и}} (x \wedge y), \not\equiv 1.$$

Этот результат не указывает, однако, на несовершенство наших формул. Он вполне закономерен и указывает на то, что в силлогистике, как в системе трехзначных отношений, не подчиняющихся закону исключенного третьего, не может быть законов подконтрарности и основанных на них законов контрадикторности.

В силлогистике могут иметь место тождества

$$A^A xy \equiv \overline{O^A} xy, \quad \overline{E^A} xy \equiv I^A xy, \quad Axy \wedge Oxy \equiv 0, \quad Exy \wedge Ixy \equiv 0,$$

но не могут иметь места тождества

$$Axy \vee Oxy \equiv 1, Exy \vee Ixy \equiv 1, Ixy \vee Oxy \equiv 1,$$

а следовательно, и

$$Axy \equiv \overline{O}xy, Exy \equiv \overline{I}\,xy.$$

Чтобы убедиться, что устранение из силлогистики законов подконтрарности и контрадикторности не противоречит, а вполне соответствует духу Аристотеля, посмотрим, например, как обосновывает принадлежность силлогистике законов контрадикторности проф. П. С. Попов в предисловии к книге Я. Лукасевича [8, стр. 10]: «... Аристотель неизменно настаивал на том, что утверждать истинность общеутвердительного суждения – то же, что отрицать истинность соответствующего частноотрицательного суждения ($Aab \equiv \overline{O}ab$), утверждать же истинность общеотрицательного суждения – то же, что отрицать истинность соответствующего частноутвердительного суждении ($Eab \equiv \overline{I}\,ab$)».

То, на чем настаивал Аристотель, всего лишь контрарность: $Aab \wedge Oab \equiv 0$, $Eab \wedge Iab \equiv 0$, а формулы, написанные в скобках, выражают контрадикторность, которой у Аристотеля нет. Если бы Аристотель имел в виду контрадикторность, то он настаивал бы еще и на том, что отрицать истинность общеутвердительного суждения – то же, что утверждать истинность соответствующего частноотрицательного суждения, а отрицать истинность общеотрицательного суждения – то же, что утверждать истинность соответствующего частноутвердительного суждения.

Итак, оснований для приписывания силлогистике несвойственных ей законов контрадикторности (и как их элемента – подконтрарности) Аристотель не дает. Наиболее вероятно, что эти законы попали в силлогистику в качестве атрибутов «логического квадрата», изобретателем которого считается византийский логик XI века Михаил Иселл.

Отношениями логического квадрата связаны двузначные формулы $\bigwedge\limits_{u} x$, $\bigwedge\limits_{u} \overline{x}$, $\bigvee\limits_{u} x$, $\bigvee\limits_{u} \overline{x}$ (u не пусто), но не трехзначные формулы, соответствующие предложениям силлогистики, и не их двухзначные компоненты.

10. ВЫРАЖЕНИЕ ЗАКОНОВ СИЛЛОГИСТИКИ

Нам остается выразить законы силлогистики в виде отношений трехзначной логики, связывающих трехзначные функции $A^A xy$, $E^A xy$, $I^A xy$ и $O^A xy$.

Сопоставляя формулы, которыми представлены эти функции, нетрудно заметить, что все они могут быть выражены при помощи одной (любой) из них и операции инверсии, например, через $I^A xy$:

$$A^A xy \equiv \overline{I} x\overline{y}, \quad A^A yx \equiv \overline{Ix}y, \quad I^A yx \equiv I^A xy,$$

$$E^A xy \equiv E^A yx \equiv \overline{I^A} xy, \quad O^A xy \equiv I^A x\overline{y}, \quad O^A yx \equiv I^A \overline{x} y.$$

Кроме того, имеются функции $I^A\bar{x}\bar{y}$ и $\overline{I^A}\,\bar{x}\bar{y}$, упущенные существующей теорией силлогистики. Мы обозначим их буквами B и C:

$$B^Axy \equiv \overline{I^A}\,\bar{x}\bar{y}, \quad C^Axy \equiv I^A\bar{x}\bar{y}.$$

Законы силлогистики в данной системе обозначений выражаются следующими тождествами:

обращение –

$$E^Axy \equiv E^Ayx, \quad I^Axy \equiv I^Ayx, \quad B^Axy \equiv B^Ayx, \quad C^Axy \equiv C^Ayx;$$

подчинение –

$$I^Axy \equiv I^Axy \vee A^Axy, \quad C^Axy \equiv C^Axy \vee A^Axy,$$
$$O^Axy \equiv O^Axy \vee E^Axy \equiv O^Axy \vee B^Axy;$$

контрарность –

$$A^Axy \equiv \overline{O^A}\,xy, \quad E^Axy \equiv \overline{I^A\,xy}, \quad B^Axy \equiv \overline{C^Axy};$$

частное заключение –

$$I^Axz \equiv I^Axz \vee I^Axy \wedge A^Ayz;$$

общее заключение –

$$A^Axz \equiv A^Axz \vee A^Axy \wedge A^Ayz.$$

Все другие формулы силлогистики можно получить из данных, имея в виду, что $E^Axy \equiv A^Ax\bar{y}$, $B^Axy \equiv A^A\bar{x}y$ и используя переименование переменных, например, подставляя x вместо x и т. и.

Доказательство того, что тождества, которыми мы выразили законы силлогистики, удовлетворяются функциями, представляющими отношения силлогистики, производится путем подстановки соответствующих формул в эти тождества и преобразования их по правилам трехзначной алгебры. В качестве примера докажем тождество, выражающее правило общего заключения. Мы должны показать, что формула $A^Axz \vee A^Axy \wedge A^Ayz$ тождественна A^Axz.

По определению $A^Axy \equiv \bigwedge_u (\bar{x} \wedge y) \wedge \left(i \vee \bigvee_u x \wedge \bigvee_u \bar{y}\right)$.

Соответствующие формулы для A^Axz и A^Ayz получаются переименованием переменных.

Мы докажем, что $A^Axy \wedge A^Ayz \equiv A^Axz \wedge M$, где M – некоторая функция переменных x, y, z. Это является достаточным условием того, что тождество удовлетворяется, так как по закону поглощения

$$A^Axz \vee A^Axz \wedge M \equiv A^Axz.$$

Выражение $A^Axy \wedge A^Ayz$ преобразуется к нужному виду следующим образом:

$$A^Axy \wedge A^Ayz \equiv \bigwedge_u (\bar{x} \vee y) \wedge \left(i \vee \bigvee_u x \wedge \bigvee_u \bar{y}\right) \wedge \bigwedge_u (\bar{y} \vee z) \wedge \left(i \vee \bigvee_u y \wedge \bigvee_u \bar{z}\right).$$

Преобразуем по частям:

$$1)\ \bigwedge_u (\bar{x} \vee y) \wedge \bigwedge_u (\bar{y} \vee z) \equiv \bigwedge_u (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee z) \equiv$$
$$\equiv \bigwedge_u (\bar{x} \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \equiv$$
$$\equiv \bigwedge_n (\bar{x} \vee z) \wedge K, \quad \text{где } K \equiv \bigwedge_u (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}),$$

$$2)\ \left(i \vee \underset{u}{\mathbf{V}} x \wedge \underset{u}{\mathbf{V}} \overline{y}\right) \wedge \left(i \vee \underset{u}{\mathbf{V}} y \wedge \underset{u}{\mathbf{V}} \overline{z}\right) \equiv \left(i \vee \underset{u}{\mathbf{V}} x \wedge \underset{u}{\mathbf{V}} \overline{z}\right) \wedge L,$$

где $L \equiv i \vee \underset{u}{\mathbf{V}} y \wedge \underset{u}{\mathbf{V}} \overline{y}$.

Объединяя преобразованные части, получаем

$$\mathrm{AAxy} \wedge \mathrm{AAyz} \equiv \underset{u}{\mathbf{\Lambda}} (\overline{x} \vee z) \wedge K \wedge \left(i \vee \underset{u}{\mathbf{V}} x \wedge \underset{u}{\mathbf{V}} \overline{z}\right) \wedge L \equiv$$
$$\equiv \underset{u}{\mathbf{\Lambda}} (\overline{x} \vee z) \wedge \left(i \vee \underset{u}{\mathbf{V}} x \wedge \underset{u}{\mathbf{V}} \overline{z}\right) \wedge K \wedge L \equiv A^{A}xz \wedge M,$$

где $M \equiv K \wedge L$. Тождество доказано.

На основе изложенной теории было разработано и осуществлено электрическое устройство для получения заключений по правилам силлогизма.

Задание исходных предложений в этом устройстве производится при помощи двух групп переключателей, содержащих по 4 переключателя. Первая группа обеспечивает набор предложении вида: «Некоторое (всякое) x (не x) есть (не есть) y (не y). Вторая группа служит для набора идентичного предложения относительно y и z. Переключатель «некоторое/всякое» трехпозиционный: помимо положений «некоторое» и «всякое», у него имеется нейтральное положение, которое следует понимать, как неопределенность. Остальные переключатели двухпозиционные.

Выдача результата осуществляется подсветкой соответствующих табло, на которых сделаны надписи, выражающие 8 отношений, которыми могут быть связаны в данной системе x и z. Неопределенное заключение обозначается состоянием, в котором ни одно табло не подсвечено.

Устройство реализует 384 правильных модуса силлогизма.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аристотель. Аналитики. Первая и вторая. Пер. с греч. Б. А. Фохга. Госполитпздат, 1952.

2. Н.И. Стяжкин. Формирование математической логики. Изд. «Наука». 1967.

3. Н. Бурбаки. Теория множеств. Изд. «Мир», 1965.

4. Д. Гильберт, В. Аккерман. Основы теоретической логики. ИЛ, 1947.

5. А.Л. Субботин. Теория силлогистики в современной формальной логике. Изд. «Наука», 1965.

6. Дж. Т. Калбертсон. Математика и логика цифровых устройств,пер. с англ. под ред. И. М. Яглома. Изд. «Просвещение», 1965.

7. С.А. Яновская. Логика классов. «Философская энциклопедия», т. 3. Изд. «Советская энциклопедия», 1964, стр. 224.

8. Я. Лукасевич. Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. ИЛ, 1959.

9. Аристотель. Метафизика. Пер. и прим. А.В. Кубицкого. Соцэкгиз, 1934.

10. В.М. Глушков. Синтез цифровых автоматов. Физматгиз, 1962.

11. П.П. Брусенцов. Использование троичного кода и трехзначной логики в цифровых машинах. Научный отчет ВЦ МГУ, № 24-ВТ (378). Изд. МГУ, 1969.

12. О. Оре. Графы и их применение. Изд.«Мир», 1965.

Статья поступила в редакцию 2 февраля 1970 г.