УДК. 681.3 Н.И. Червяков, С.Л. Ремизов

Локализация ошибки на основе метода расширенной проекции

(Ставропольский военный институт связи ракетных войск, Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики)

Система счисления в остаточных классах (СОК) [1] открывает возможность использования единого помехоустойчивого кода для борьбы с ошибками, возникающими при передаче информации по каналам связи и при ее обработке в цифровых системах.

Рассмотрим систему оснований p_1, $p_2,\ldots$, p_{n-1} с диапазоном $R=\prod_{i=1}^{n-1} p_i$, который будем называть рабочим. Введем основание p_n, взаимно простое с любым из n-1 оснований, которое назовем контрольным, и будем представлять числа в системе из n оснований. Это означает, что мы будем передавать и обрабатывать числа, принадлежащие диапазону (0 ÷ R), в более широком диапазоне (0 ÷ P), где $P = p_n R$ [1], который будем называть полным. Правильными будем считать числа, принадлежащие диапазону (0 ÷ R), искаженные – диапазону (R ÷ P).

Для обнаружения факта ошибки используется следующее правило [3].

Если число представлено в обобщенной полиадической системе (ОПС),то

- при $a_n = 0$ число принадлежит рабочему диапазону (правильное);
- при $a_n \neq 0$ число принадлежит диапазону ($R \div P$) (ошибочное).

В [5] показано, что число $A = (\alpha_1,...,\alpha_i,....,\alpha_n)$ преобразованное в число $\tilde{A} = (\alpha_1,...,\tilde{\alpha}_i,...,\alpha_n)$ через ошибку в i-той цифре при умножении каждой цифры α_j на p_i и приведении этого произведения по модулю p_j проецируется на модифицированный правильный диапазон ($0 \div p_i R$) и при умножении на p_j при $i \neq j$ проецируется на модифицированный неправильный диапазон ($p_i R \div P$).

Для определения диапазона, в который попадает расширенная проекция необходимо представление ОПС такое, что произведение оснований при старшем коэффициенте a_n было равно $p_i R$. Следующая теорема показывает, как осуществить выбор системы оснований, чтобы выполнялось это условие.

Теорема 1

Для того, чтобы при старшем коэффициенте a_n представления числа A в ОПС произведение оснований было равно $p_i R$ необходимо и достаточно в исходной системе основание p_i было заменено на p_i^2.

Доказательство

Докажем достаточность утверждения.

Представление числа A в ОПС имеет вид

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k \prod_{i=1}^{k-1} p_i \ . \qquad (1)$$

Для k = 1: $\prod_{i=1}^{0} p_i = 1$, для k = n $a_n \prod_{i=1}^{n-1} p_i$. Так как $\prod_{i=1}^{n-1} p_i = R$, то для k = n справедлива запись $a_n R$.

По определению

$$R=\prod_{i=1}^{n-1}p_i=p_1\prod_{i=2}^{n-1}p_i=p_2\prod_{\substack{i=1\\i\neq 2}}^{n-1}p_i=\ldots=p_j\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n-1}p_i=\ldots=p_{n-1}\prod_{i=1}^{n-2}p_i\,. \qquad (2)$$

Умножим обе части этого равенства на p_j и получим

$$p_jR=p_j\prod_{i=1}^{n-1}p_i=p_jp_1\prod_{i=2}^{n-1}p_i=p_jp_2\prod_{\substack{i=1\\i\neq 2}}^{n-1}p_i=\ldots=p_jp_j\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n-1}p_i=\ldots=p_jp_{n-1}\prod_{i=1}^{n-2}p_i\,. \qquad (3)$$

Введем подстановку

$$p'_1=p_jp_1;\,p'_2=p_jp_2;\ldots;p'_j=p_jp_j;\ldots;p'_{n-1}=p_jp_{n-1} \qquad (4)$$

тогда

$$p_jR=p_j\prod_{i=1}^{n-1}p_i=p'_1\prod_{i=2}^{n-1}p_i=p'_2\prod_{\substack{i=1\\i\neq 2}}^{n-1}p_i=\ldots=p'_j\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n-1}p_i=\ldots=p'_{n-1}\prod_{i=1}^{n-2}p_i\,. \qquad (5)$$

Достаточность утверждения доказана. Необходимость докажем следующим образом. При осуществлении перевода числа из СОК в ОПС i-тая цифра будет вычисляться следующим образом

$$a_i=((((\ldots(a_i-a_1)p_1^{-1}-a_2)p_2^{-1}-a_3)\ldots-a_{i-1})p_{i-1}^{-1})\bmod p_i\,. \qquad (6)$$

Введем обозначение

$$c=((\ldots(\alpha_i-a_1)p_1^{-1}-a_2)p_2^{-1}-a_3)\ldots-a_i\,. \qquad (7)$$

Подставляя (7) в (6), получим

$$a_i\equiv cp_{i-1}^{-1}\bmod p_i\,. \qquad (8)$$

Если положить в p_{i-1} в новой системе оснований равным $p_{i-1}p_i$, то

$$a_i\equiv c(p_{i-1}p_i)^{-1}\bmod p_i \qquad (9)$$

или

$$a_i\frac{p_{i-1}}{c}p_i\equiv 1\bmod p_i \qquad (10)$$

А сравнение такого вида решений относительно a_i не имеет.

Таким образом, для получения верхней границы модифицированного правильного диапазона при старшем коэффициенте a_n необходимо осуществить преобразование ОПС такое, что в качестве одного из оснований системы взято основание, умноженное само на себя. При этом это должно быть основание, по которому находится расширенная проекция.

Для нахождения представления в ОПС при такой системе оснований необходимо знать остаточную цифру по новому основанию. Ее нахождение можно осуществить способами, изложенными в [2,4].

Рассмотрим пример.

Пусть имеется система оснований $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, где p_1, p_2 – рабочие основания, а p_3 – контрольное, и в этой системе задано число A=3=(1,0,3). Пусть произошло искажение второго символа: $(1,0,3) \rightarrow (1,1,3)$. Факт искажения будем считать установленным.

Найдем расширенную проекцию по основанию p_1 $(1,1,3)\cdot 2=(0,2,1)$. Верхняя граница модифицированного правильного диапазона $p_1R = 2\cdot 6 = 12$. Заменим основание p_1 на основание $p_1^2 = 4$. Тогда представление расширенной проекции для новой системы оснований СОК ($p_1 = 4$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$) будет иметь вид (2,2,1), а представление в ОПС (2,0,2) = 26. Так как $a_3 \neq 0$, то цифра по основанию p_1 безошибочна ($12 < 26$). Найдем теперь расширенную проекцию по основанию p_2. $(1,1,3)\cdot 3=(1,0,4)$. Верхняя граница модифицированного правильного диапазона составит $p_2R = 3\cdot 6 = 18$.

В новой системе оснований СОК ($p_1 = 2$, $p_2 = 9$, $p_3 = 5$) расширенная проекция будет иметь вид (1,0,3), представление в ОПС (1,4,0) = 9. Так как $a_3=0$, то во втором разряде цифра искажена ($18 > 9$).

Таким образом, с помощью предложенного метода можно осуществить локализацию искаженного разряда в данных, представленных кодом СОК.

Данный способ имеет преимущества перед методом, изложенным в [1] в том, что исчезает необходимость знать величину проекции, достаточно знать только старший коэффициент представления ОПС. Кроме того, в предлагаемом методе сравнение можно реализовать с помощью модульной операции.

Литература

1. *Акушский И.Я., Юдицкий Д.И.,* Машинная арифметика в оста-

точных классах. – М.: Советское радио, 1968. – 440 с.

2 Справочник по цифровой вычислительной технике/ Под ред. *Б.Н. Малиновского*. – Киев: Техника, 1975. – 512 с.

3. *Торгашев В. А*. Система остаточных классов и надежность ЦВМ. М.: Сов. радио, 1973. – 118 с.

4 *Червяков Н.И., Ряднов С.А., Сахнюк П.А., Шапошников А.В.*, Модулярные параллельные вычислительные структуры нейропроцессорных систем. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 288 с.

5. *W. Kenneth Jenkins, Edward J Altman.* Self-checking properties of Residue Number error checkers based on Mixed Radix conversion. – IEEE Transactions on circuits and system, vol. 35, No. 2, February.