# «СОВЕРШЕННАЯ АРИФМЕТИКА» ВАЦЛАВА ЙОЗЕФА ПЕЛИКАНА

**Златопольский Д.М.**

к.т.н., доцент, ГБОУ Школа № 1530 «Школа Ломоносова» (Москва);

e-mail: zlatonew@gmail.com

# «PERFECT ARITHMETIC» BY WENCESLAV IOSEPH PELICAN

**Zlatopolski D.M.**

PhD (in Tech), Associate Professor, State Educational Institution of school № 1530 «Lomonosov School» (Moscow);

e-mail: zlatonew@gmail.com

**Аннотация:** в статье представляется книга Вацлава Йозефа Пеликана «Arithmeticus Perfectus Qui tria numerare nescit. Seu Arithmetica dualis, In qua Numerando non procedure, nisi ad duo, & tamen omnes quæstiones Arithmeticæ negotio facili enodari Possunt», написанная на латинском языке и изданная в Праге в 1712 году. В ней описываются действия над целыми и дробными числами в двоичной системе счисления, в том числе правила извлечения квадратных и кубических корней, методы преобразования чисел из десятичной системы в двоичную и обратно и др. Данная книга представляет первый большой труд по двоичной системе счисления, а по сути, – полноценный, методически грамотный учебник арифметики с использованием этой системы.

**Abstract:** the article presents the book by Wenceslas Joseph Pelican «Arithmeticus Perfectus Qui tria numerare nescit. Seu Arithmetica dualis, In qua Numerando non procedure, nisi ad duo, & tamen omnes quæstiones Arithmeticæ negotio facili enodari Possunt», written in Latin and published in Prague in 1712. The book describes operations on integers and fractional numbers in the binary number system, including the rules for extracting square and cube roots, methods for converting numbers from the decimal system to the binary system and vice versa. This book is the first big work on the binary system reckoning, but in fact – a full-fledged, methodologically literate textbook of arithmetic using this system.

## О том, как автор статьи всё узнал

В 1971 году Антон Глазер, профессор математики Пенсильванского университета (США) опубликовал книгу [2] «History of binary and other nondecimal numeration» («История двоичной и других недесятичных систем счисления»). Этот фундаментальный труд, выдержавший два издания, включает подробный обзор всех известных работ по истории недесятичных систем счисления с конца XVI века до момента появления компьютеров. Только библиографический список содержит около 250 источников!

На стр. 83 упомянутой книги можно прочесть: «Чарльз Хаттон в 1815 году опубликовал “Математический и физический словарь”. Он объясняет понятие “двоичная арифметика” как “… разновидность арифметики, которая … лучше, чем обычная, приспособлена для исследования свойств чисел …”».

Ознакомившись с работой Ч. Хаттона [3], мы выяснили, что в ней, кроме приведённой цитаты, представлена и другая информация, связанная с двоичной арифметикой. В частности, упоминается книга [4] автора «Ios. Pelican, of Prague…» (из Праги), изданная в 1712 году (А. Глазером в перечне литературы к [2] она не указана). Нам удалось найти данную книгу. Её полное название на латыни «Arithmeticus Perfectus Qui tria numerare nescit. Seu Arithmetica dualis, In qua Numerando non proceditur, nisi ad duo, & tamen omnes quæstiones Arithmeticæ negotio facili enodari possunt» (см. рис. 1), что можно перевести как «Совершенная арифметика, для тех, кто не умеет считать больше двух, или Двоичная арифметика, в которой используются только два символа и в которой легко решаются многие вопросы арифметики». Автор – Вацлав Йозеф Пеликан (Wenceslav Ioseph Pelican).

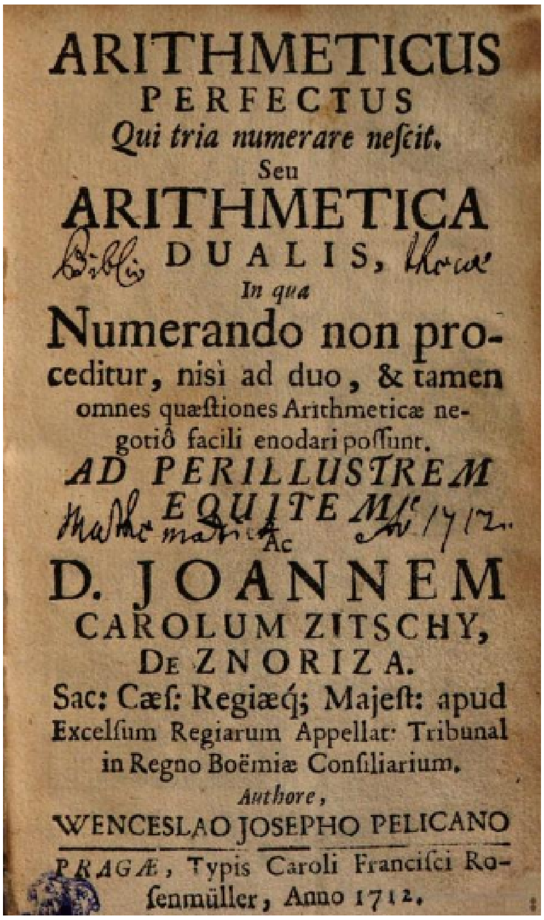

ARITHMETICUS
PERFECTUS
*Qui tria numerare nescit.*
Seu
ARITHMETICA
DUALIS,
*In qua*
Numerando non pro-
ceditur, nisi ad duo, & tamen
omnes quæstiones Arithmeticæ ne-
gotiô facili enodari possunt.
*AD PERILLUSTREM*
*EQUITEM*
Ac
D. JOANNEM
CAROLUM ZITSCHY,
De ZNORIZA.
Sac: Cæs: Regiæq; Majest: apud
Excelsum Regiarum Appellat: Tribunal
in Regno Boëmiæ Consiliarium.
*Authore,*
WENCESLAO JOSEPHO PELICANO
*PRAGÆ*, Typis Caroli Francisci Ro-
senmüller, Anno 1712.

Рис. 1

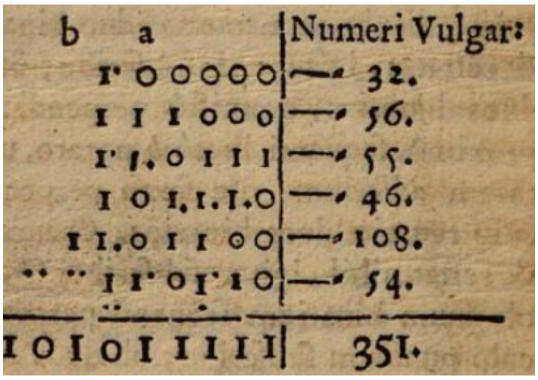
**Содержание книги**

Книга Пеликана имеет объём 86 стр. и включает предисловие, обращение к читателю и четыре главы. Эпиграф к книге «Servorum minimus» можно истолковать как «Используй минимум».

Глава I «De numeris Arithmeticæ Dualis integris» посвящена целым двоичным числам. В разделе I данной главы представлена общая характеристика двоичной системы счисления, отмечена её простота. Так, указано, что таблица умножения в ней состоит всего из одной строчки: 1 × 1 = 1.

В разделе II «Numeratione Arithmeticæ Dualis» описываются особенности записи двоичных чисел, а в разделах III–VI рассматриваются основные арифметические действия (сложение, вычитание, умножение и деление) в двоичной системе. Всем расчётам предшествуют подробные разъяснения, а по окончании вычислений автор даёт заключительные комментарии. Как правило, во всех примерах справа записаны соответствующие десятичные (в книге их название – *vulgares*) числа.

Перейдём к упражнениям, представленным в книге. Первое действие – сложение.

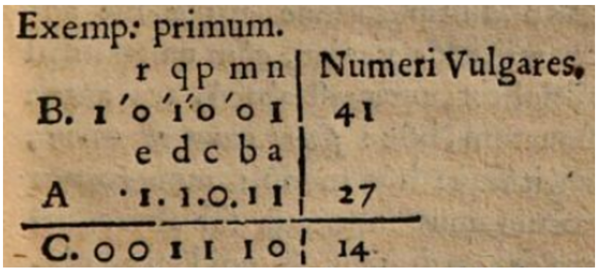


| b a | Numeri Vulgar: |
|---|---|
| 1·00000 | — 32. |
| 111000 | — 56. |
| 1·1.0111 | — 55. |
| 101.1.1.0 | — 46. |
| 11.01100 | — 108. |
| 11·01·10 | — 54. |
| 101011111 | 351. |

Рис. 2. Пример сложения чисел из книги Йозефа Пеликана

Видно (см. рис. 2), что при сложении в разряде двух единиц получающийся перенос единицы «в уме» отмечается точкой, которая учитывается в соседнем слева разряде. Если количество единиц в разряде (с учётом переноса) равно четырём, то единица переносится в разряд, являющийся вторым слева от текущего (и также отмечается точкой в этом разряде). Данная форма записи облегчает сложение большого числа слагаемых.

Ещё более подробно объясняется методика вычитания: в предварительном тексте и в примере каждая цифра уменьшаемого и вычитаемого обозначается некоторой буквой (см. рис. 3). Заимствование единицы отмечается в соседнем слева разряде «штрихом».



Exemp: primum.

| r q p m n | Numeri Vulgares. |
|---|---|
| B. 1′0′1′0′01 | 41 |
| e d c b a | |
| A ·1.1.0.11 | 27 |
| C. 001110 | 14 |

Рис. 3. Пример вычитания чисел в книге Йозефа Пеликана

К сожалению, во втором примере вычитания двоичных чисел (см. рис. 4) имеется «опечатка» в десятичном значении полученной разности.

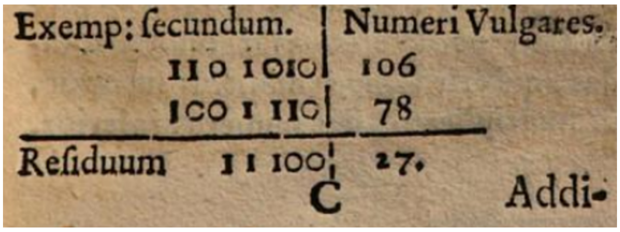

Exemp: ſecundum. | Numeri Vulgares.
110 1010 | 106
100 1110 | 78
Reſiduum 11 100 | 27.
C
Addi-

Рис. 4

В конце раздела «Вычитание» автор приводит дополнительный комментарий, смысл которого в том, что каждая цифра разности может быть равна только 0 (когда цифры уменьшаемого и вычитаемого равны) или 1.

Так же подробно в книге описывается и умножение (см. рис. 5):

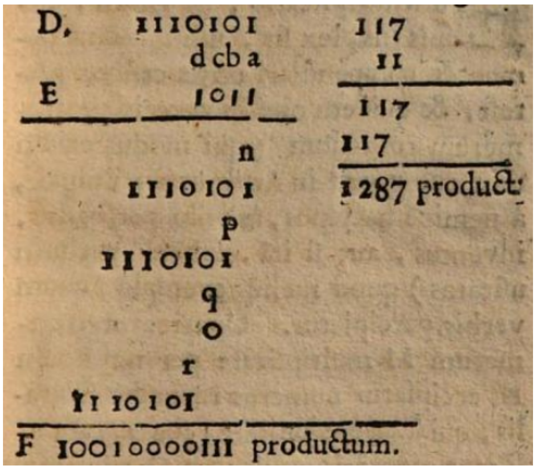

D. 1110101 117
dcba 11
E 1011 117
n 117
1110101 1287 product:
p
1110101
q
o
r
1110101
F 10010000111 productum.

Рис. 5. Пример умножения чисел из книги Йозефа Пеликана

Интересно, что во втором примере (см. рис. 6) Пеликан не смещает промежуточные числа на уровень единиц в множителе, как в первом примере, а учитывает только количество дополнительных нулей в каждом из двух промежуточных значений.

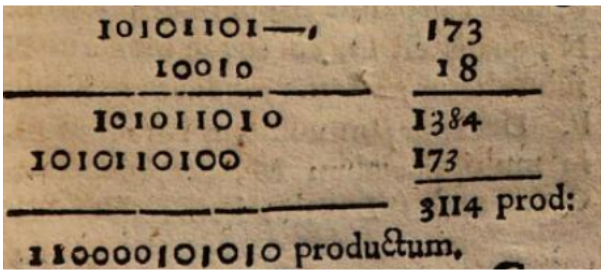

10101101—, 173
10010 18
101011010 1384
1010110100 173
3114 prod:
110000101010 productum.

Рис. 6

Приведённый пример можно интерпретировать так:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \\
 & & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\
\hline
\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathit{0}
\end{array}
$$

**1 0 1 0 1 1 0 1** *0 0 0 0*

1 1 0 0 0 0 1 0 1 0 1 0

Поскольку в записи множителя 10010 единицы присутствуют только во втором и пятом разрядах, умножение на них будет подразумевать «смещение» промежуточных результатов вправо на соответствующее число разрядов (сравните с умножением десятичных чисел, в записи которых есть нули).

В примечании после раздела, посвящённого умножению, автор, наряду с общими методическими вопросами, приводит интересный пример умножения числа 1110111 на 11110 (см. рис 7).

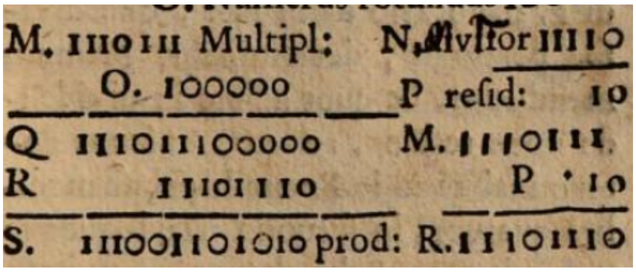

M. 1110111 Multipl: N. Mvltor 11110
O. 100000 P resid: 10
Q 111011100000 M. 1110111
R 11101110 P · 10
S. 11100110101010 prod: R. 11101110

Рис. 7

Анализ используемого в нём способа решения показывает, что Пеликан рассматривает множитель 11110 как разность двух чисел 100000 и 10. Умножение на эти числа проводится очень просто (на рис. 7 результаты обозначены соответственно буквами Q и R), а искомое «основное» произведение S равно разности значений Q и R. По сути, автором применён дистрибутивный закон умножения по отношению к вычитанию. Такой приём (подчеркнём: предложенный в начале XVIII века!) эффективнее многократного умножения множимого на 1 и последующего сложения.

В примерах деления (первый из которых также подробно описан – см. рис. 8, где рассматривается процедура деления 1001101 на 101) результаты получаются в виде смешанных чисел – соответственно, $1111\frac{10}{101}$ (рис. 8), $100\frac{1011}{11011}$ (рис. 9) и $110\frac{101}{1000}$ (рис. 10 справа). Таким образом, автор непосредственно рассматривает деление с остатком. Возможность деления нацело при этом не исключена.

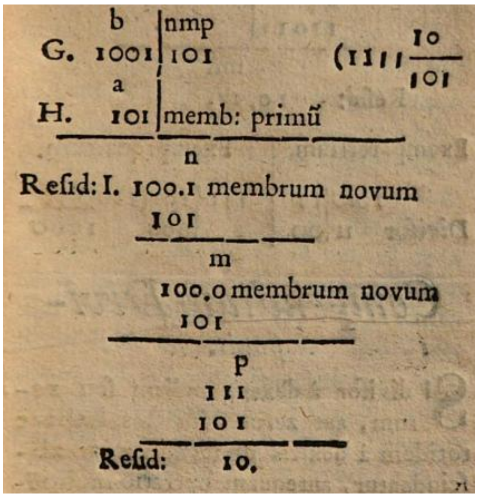



Рис. 8. Описание деления 1001101 на 101

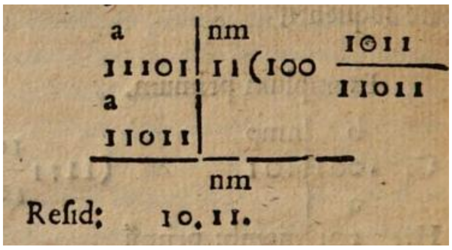



Рис. 9. Деление 1110111 на 11011

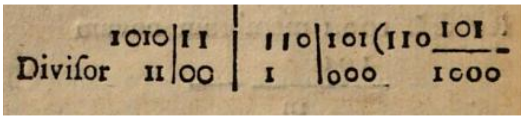



Рис. 10. Деление 110101 на 1000

Анализ примера на рис. 9 показывает, что Й. Пеликан старается предупредить возможные ошибки при делении: заметим, что неполное частное здесь оканчивается двумя нулями, терять которые ни в коем случае нельзя. Однако если количество цифр частного определено верно, ошибки не произойдёт. Скорее всего, каждый учитель, осваивая со школьниками процедуру деления десятичных чисел, обращает их внимание на подобные ситуации.

В дополнении после раздела о делении чисел автор книги отмечает, что в ряде случаев процедура деления упрощается. Например, если делитель оканчивается одним или несколькими нулями, то можно провести деление на него без конечных нулей, отбросив (справа) в делимом соответствующее количество цифр (см. пример на рис.10).

Далее он излагает оригинальную (и эффективную!) методику определения результатов деления, в которой вместо многократного вычитания используется операция сложения, умножение на число из единицы и нескольких нулей, а также деление на такое число.

После описания арифметических действий Пеликан рассказывает (во фрагменте, названном им «Examen prædítarum specierum») о том, как можно проверить полученные результаты:

– вычитания – путём сложения (и наоборот);

– деления – путём умножения (и наоборот).

При этом он ссылается на приведённые ранее примеры. Конечно, такая проверка вполне современна.

В главе II книги рассматриваются дроби, которые в настоящее время называют «обыкновенными». Описываются основные арифметические действия с ними и приводятся примеры расчётов. Активно применяются свойства дробей. Например, при делении на дробь $\frac{10}{101}$ используется умножение на обратное ей число $\frac{101}{10}$ (см. рис. 11).

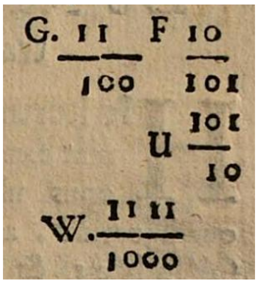



Рис. 11. Нахождение частного дробей $\frac{11}{100}$ и $\frac{10}{101}$

Пример умножения дробей показан на рис. 12.

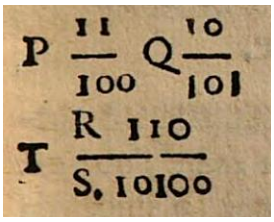



Рис. 12. . Нахождение произведения дробей $\frac{11}{100}$ и $\frac{10}{101}$

Буквенные символы в примерах используются автором при описании методики вычислений (обратите внимание, например, на рис. 7–8). Заметим, что действия с дробями в двоичной системе Пеликан описал впервые в истории[1].

[1] О существовании более ранних источников соответствующего содержания нам неизвестно.

Следующая глава книги Пеликана, по нашему мнению, – просто выдающаяся! В ней рассматриваются правила извлечения квадратного и кубического корней из двоичных чисел. В небольшой преамбуле говорится, что методика основана на формулах квадрата и куба суммы двух чисел. Эти формулы приводятся применительно к двоичным числам *a* и *b* в следующем виде (см. рис. 13):

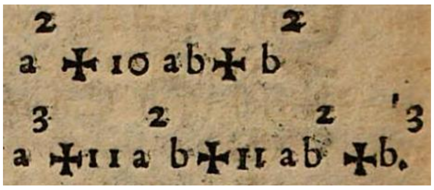



Рис. 13. Формулы квадрата суммы чисел и куба суммы чисел
в книге Йозефа Пеликана

Приведём представленные в книге примеры извлечения квадратного и кубического корней (см. рис. 14–15).

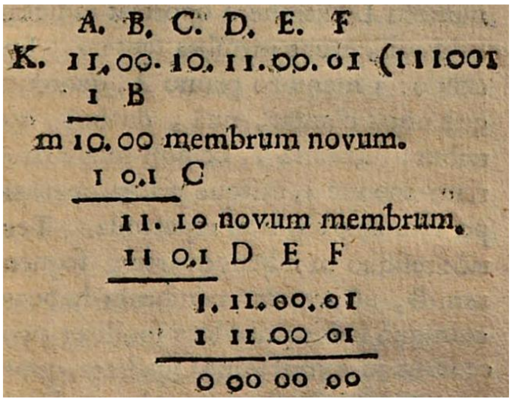



Рис. 14. Извлечение квадратного корня из числа 110010110001
(3249 в десятичной системе)

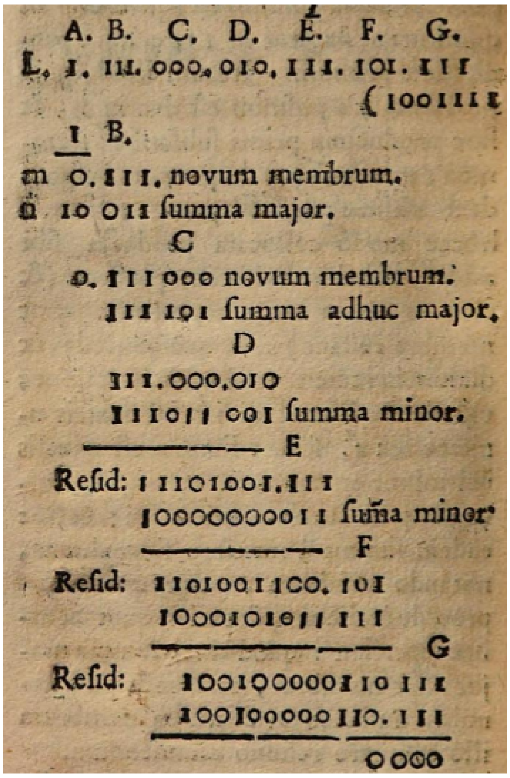



Рис. 15. Извлечение квадратного корня из числа 1111000010111101111
(493039 в десятичной системе)

Данным примерам предшествует подробное описание методики расчётов, в котором используются буквенные обозначения промежуточных результатов (их можно видеть и на рисунках).

Анализ показывает, что методы извлечения квадратного и кубического корней из двоичного числа аналогичны соответствующим методам для десятичных чисел, которые ранее изучались в школах и назывались «методами извлечения корней столбиком». Так как сейчас они малоизвестны, остановимся на них подробнее.

Цифры числа, из которого извлекается корень, начиная справа, разбиваются на группы из двух цифр в случае квадратного корня и трёх в случае кубического, после чего последовательно подбираются цифры корня.

На рис. 14 приведён пример извлечения квадратного корня из числа 110010110001. Для него разбиение на группы, о котором шла речь выше, будет таким: 11.00.10.11.00.01 (в книге, для ясности, автор обозначает их буквами A, B, C, D, E, F).

Справа постепенно записываются цифры искомого корня. Первая цифра корня всегда равна 1. Вычтем её из числа крайней левой группы, получим 10:

11.00.10.11.00.01 1 – текущее значение корня

_1

10

К разности приписываются цифры следующей группы:

11.00.10.11.00.01 1

_1

10 00

Как узнать очередную цифру квадратного корня? Для этого следует удвоить текущее значение корня (произведение будет равно 10) и определить при какой максимальной цифре $x$ произведение числа $10x$ на $x$ не будет превышать 1000. Такой цифрой является 1. Подставляется 1 вместо $x$ и полученное число вычитается:

11.00.10.11.00.01 11 – текущее значение корня

_1

10 00

1 01

11

После выписывания цифр следующей группы (у автора она обозначена как C) имеем:

11.00.10.11.00.01 11 – текущее значение корня

_1

10 00

1 01

11 10

Далее действуем аналогично. Удваиваем текущее значение корня (получаем 110) и подбираем очередную его цифру $x$, чтобы число $110x$ не превзошло 1110.

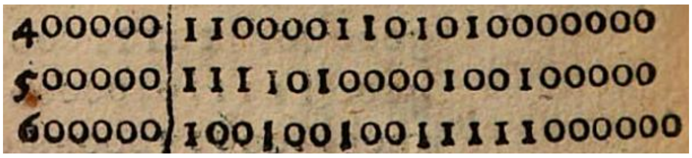
Видно, что очередная цифра корня равна 1. По тем же правилам находим остальные цифры квадратного корня.

Методы извлечения корней подробно описаны в нашей статье [1].

В заключительной главе IV «De Regulis Arithmeticæ Dualis practicis», название которой можно перевести как «Правила практического использования двоичной арифметики», представлены:

1) вступительный текст, в котором рассказывается о том, что десятичное число 7653 можно рассматривать как сумму значений 7000 + 600 + 50 + 3. Эта особенность учитывается автором далее;

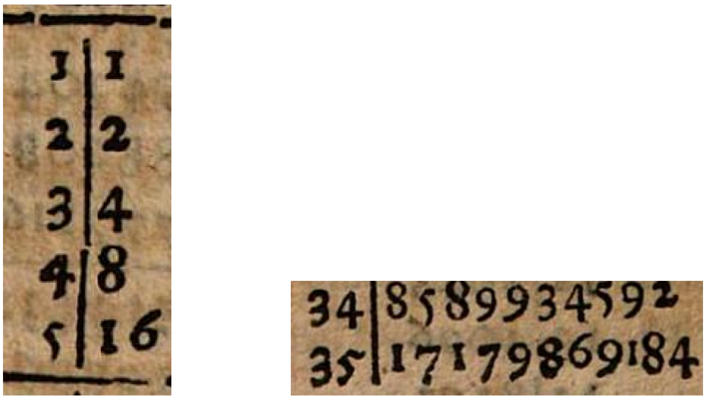
2) таблица I, в которой представлено двоичные числа, соответствующие десятичным значениям 1, 2, …, 9, 10, 20, …, 90, 100, 200, …, 900, 1000, 2000, …, 9000, 10 000, 20 000, …, 90 000 …, 100 000, 200 000, …, 600 000 (см. рис. 16);



| | |
|---|---|
| 400000 | 1100001101010000000 |
| 500000 | 1111010000100100000 |
| 600000 | 10010010011111000000 |

Рис. 16

3) таблица II, в левом столбце которой представлено количество цифр в двоичной записи десятичных чисел 1, 2, 4, 8, …, $2^{33}$ и $2^{34}$. Первые и последние десятичные значения показаны на рис. 17:



| | |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 4 |
| 4 | 8 |
| 5 | 16 |

| | |
|---|---|
| 34 | 8589934592 |
| 35 | 17179869184 |

Рис. 17

4) параграф, в котором иллюстрируется перевод десятичных чисел в двоичные и наоборот. В первом случае (на примере перевода числа 7653 – см. рис. 18) применяется оригинальная методика, заключающаяся в том, что искомое двоичное число определяется как сумма двоичных чисел, соответствующих десятичным числам 7000, 600, 50 и 3 (которые представлены в таблице I книги – см. выше);

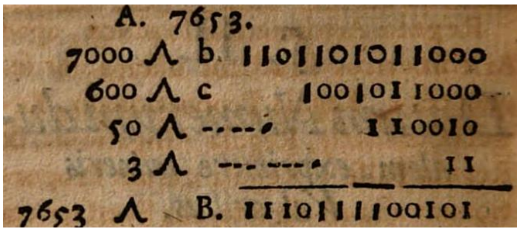



Рис. 18

Методика перевода двоичного числа 1110111100101 в десятичное показана на рис. 19:

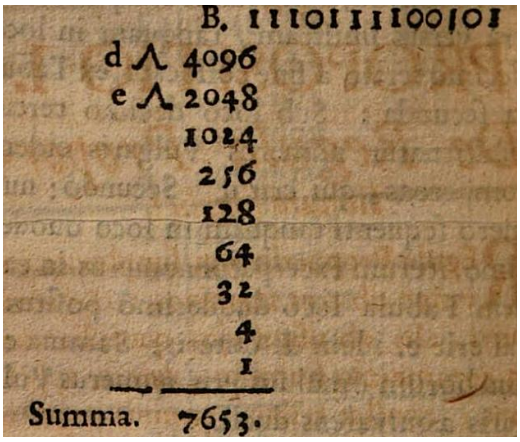



Рис. 19

Видно, что используются, как бы мы сказали в настоящее время, «весомости разрядов, в которых записаны единицы» (соответствующие значения совпадают с перечисленными в правом столбце таблицы II);

5) методика решения в двоичной системе задач на пропорции (на примере расчёта стоимости ткани; одна из задач формулируется так: «111 футов ткани стоит 1101 аурейсов; сколько ткани можно купить за 100111 аурейсов?»), задач на смеси, действий с весами, выраженными в различных единицах (фунтах, унциях и т. п.), и других расчётов «практического» характера (в соответствии с названием главы IV).

**Вывод**

В целом можно сказать, что книга Вацлава Йозефа Пеликана (напомним: написанная в начале XVIII века!) представляет первый большой труд по двоичной системе счисления, а по сути, – полноценный, методически грамотный учебник арифметики с использованием этой системы, содержащий оригинальные (даже по современным меркам) решения задач.

## Литература

1. *Златопольский Д.М.* Методика извлечение квадратного и кубического корней в двоичной системе счисления // Информатика в школе. 2021. № 1. С. 42–45. DOI: 10.32517/2221-1993-2021-1-42-45.

2. *Glaser, A.* History of binary and other nondecimal numeration (revised edition). Tomash Publishers. 1981. 231 p.

3. *Hutton, C.* A Philosophical and Mathematical Dictionary. London. 1815. 1 // https://archive.org/details/philosophicalmat01hutt/page/228/mode/2up

4. *Pelican, W. I.* Arithmeticus Perfectus Qui tria numerare nescit. Seu Arithmetica dualis, In qua Numerando non proceditur, nisi ad duo, & tamen omnes quæstiones Arithmeticæ negotio facili enodari possunt. Pragæ. 1712 //
https://play.google.com/books/reader?id=cNxdAAAAcAAJ&hl=ru&pg=GBS.PP14