УДК 621.29 В.Г. Евстигнеев

Недвоичные компьютерные арифметики

(ЗАО «МНИТИ»)

В статье с позиций сегодняшнего дня делается попытка оценить вклад Советских ученых прошлого столетия в развитие вычислительной техники Советского Союза и показать диапазон научных исследований в этой области и в частности в разработке новых компьютерных арифметик и их внедрении в создание принципиально новых вычислительных систем, намного опережавших достижения западных и в первую очередь американских специалистов в этой области. И только постепенное технологическое отставание Советской микроэлектронной промышленности не позволило сбыться смелым и много обещающим идеям Советских ученых того времени. Автор статьи сумел внести свой скромный вклад в общую копилку прогресса вычислительной техники того времени.

В 70 – 80 годы двадцатого столетия усилиями советских ученых С.А. Лебедева, В.М. Глушкова, М.А. Карцева, И.Я. Акушского, Д.И. Юдицкого, Г.Я. Гуськова, В.С. Семенихина, И.В. Прангишвили, Н.Я. Матюхина и многих других были созданы образцы вычислительной техники, превосходящие по своим параметрам, новизне идей и архитектуре все мировые достижения. В качестве примера назову лишь некоторые из вычислительных машин тех лет: серия ЭВМ класса БЭСМ И «Эльбрус», ЭВМ «Стрела», серии ЭВМ М-20, М-220, 5Э76, «Мир», ПС и др. и лишь после того, как СССР стал воспроизводить ЭВМ класса IBM-360 (ЕС ЭВМ) и копировать, а не разрабатывать микроэлектронную элементную базу, судьба советской вычислительной техники была предрешена. Ответственность за это лежит не на ученых и разработчиках, а на руководстве страны.

В те же годы в СССР коллективы ученых исследовали и разрабатывали различные арифметики, позволявшие создавать ЭВМ с более высокой скоростью обработки данных по сравнению с широко распространенной двоичной системой счисления. Так, под руководством И.Я. Акушского и Д.И. Юдицкого была создана ЭВМ К-340 на основе системы счисления в остаточных классах, которая длительное время выпускалась нашей промышленностью и отличалась высокой производительностью и надежностью. Коллективом специалистов во главе с В.М. Глушковым были созданы и запущены в производство ЭВМ серии «Мир» с новой архитектурой и системой программирования, позволявшие производить вычисления с переменной (регулируемой) разрядностью. Тогда же под руководством И.В. Прангишвили разрабатываются и производятся ЭВМ серии ПС на основе ассоциативных процессоров с параллельной архитектурой, а под руководством М.А. Карцева – высокопроизводительные, высоконадежные вычислительные комплексы большой разрядности (до 512 двоичных разрядов) для специальных применений.

В начале 80-х годов появились первые публикации советских ученых о Фибоначчиевой системе счисления [1] и иерархической системе счисления, которые позволяли создавать более высокопроизводительные и надежные вычислительные средства на основе новых элементов микроэлектроники, в том числе и многозначных. Одновременно разрабатываются и алгоритмы выполнения арифметических операций в ЭВМ, основанные на новых арифметиках.

Кратко опишем наиболее интересные системы счисления для вычислительных устройств, быстродействие и надежность которых превосходят аналоги, основанные на двоичной арифметике.

Знако-разрядная система счисления.

Число в знако-разрядной системе счисления [2], как и в любой позиционной системе, можно записать в виде

$$X = \sum_{i=-m}^{n} x_i \cdot S^{-i},$$

где $x_i=\{-R, -R+1,...,-1, 0, 1,..., R\}$, $S=2R$ или $S=2R+1$.

Сложение двух чисел в знако-разрядной системе счисления выполняется в два такта. В первом такте формируются поцифровые промежуточные суммы w_i и цифры поразрядных переносов t_i, которые могут принимать значения -1, 0 и +1, т.е. $x_i + y_i = w_i + t_iS$.

Во втором такте формируется окончательная сумма путем сложения цифр промежуточных разрядных сумм и соответствующим им цифр поразрядных переносов, т.е. $Z_i = w_i + t_{i+1}$.

Умножение чисел в знако-разрядной системе счисления выполняется последовательным сложением (вычитанием) и сдвигом вправо результатов умножения множимого на S-ичные цифры множителя, начиная с младшего S-ичного разряда. Деление чисел подчиняется общим правилам деления в S-ичной системе счисления.

Основным достоинством знако-разрядной системы счисления является то, что сигнал переноса при выполнении операции сложения распространяется не далее соседнего разряда, а время выполнения операции не зависит от разрядности операндов. То есть любая операция сложения выполняется за два такта (под тактом здесь понимается время вычисления разрядной суммы.

Фибоначчиева система счисления.

Среди позиционных весомозначных систем счисления есть системы, в которых веса разрядов выражаются не известным соотношением $D_i=S_i$, а другими, например числами ряда Фибоначчи, т.е. $D_i=D_{i-2}+D_{i-1}$. в этом случае система счисления называется Фибоначчиевой. Другой пример позиционной весомозначной системы счисления с нетрадиционным законом формирования весов разрядов – так называемая полиадическая система счисления. Веса разрядов в ней определяются выражением

$D_i=p_i \cdot D_{i-1}$, где p_i – взаимно –простые числа.

Остановимся на Фибоначчиевой системе счисления. В работе [1] показано, что любое натуральное число N может быть представлено в двоичной p-системе счисления при p^30, весами разрядов в которой являются числа Фибоначчи. При этом после каждой единицы слева направо следует не менее p нулей. Так, например, при $p=1$ число 75 в двоичной 1-системе счисления можно записать как

$$75=1001010100=1\cdot 55+0\cdot 34+0\cdot 21+1\cdot 13+0\cdot 8+1\cdot 5+0\cdot 3+1\cdot 2+0\cdot 1+0\cdot 1.$$

Отметим две особенности сложения значащих разрядов в двоичной 1-системе счисления. Во-первых, при суммировании единиц возникает перенос не одной единицы (как в классической двоичной системе счисления), а нескольких одновременно. Во-вторых, единицы можно складыватьдвумя способами. В первом способе при сложении i-х разрядов чисел в i-м разряде промежуточной суммы записывается 1 и возникают переносы двух единиц одновременно – в (i-1)-й и в (i-p-1)-й разряды. При втором способе сложения единиц в соответствующем (i-м) разряде промежуточной суммы записывается 0 (как и в классической двоичной арифметике) и возникает перенос $p+1$ единиц (одна единица – в старший (i+1)-й и p единиц – в младшие (i-p-1), (i-p-2),…,(i-$2p$) разряды).

Наиболее рациональный способ умножения двоичных Фибоначчиевых чисел в 1-системе счисления аналогичен умножению в классической двоичной, хотя и обладает своей спецификой [1].

Основной способ деления чисел *($Z=X/Y$)* в Фибоначчиевой системе счисления: накапливаются кратные числам Фибоначчи значения делителя, т.е. $N=Y \times K_j$ $(K_j=1,2,3,5,...)$. Кратные делителя сравниваются с делимым, начиная с максимального кратного. В зависимости от результата сравнения формируется частное, т.е.

$$Z=\sum_{j=1}^{I} K_j .$$

Несмотря на очевидную непрактичность Фибоначчиевой системы счисления для конструирования цифровых вычислительных устройств, работы создателя системы и его учеников представляют собой значительный научный результат, который показывает неисследованность разнообразия систем счисления и необходимость поиска систем с новыми качествами.

Система остаточных классов.

Система остаточных классов (СОК) – это непозиционная система счисления, числа в которой представляются остатками от деления на выбранную систему оснований P_1, $P_2,\ldots,P_n$ и являются взаимнопростыми числами. Операции сложения, вычитания и умножения над числами в СОК производятся независимо по каждому основанию без переносов между разрядами (основаниями). Диапазон представимых чисел $P=P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n$ [3].

Если задан ряд положительных взаимнопростых чисел P_1, $P_2,\ldots,P_n$, то целое положительное число A на выбранные основания P_1, $P_2,\ldots,P_n$, можно записать в виде $A=(a_1, a_2,\ldots,a_n)$,

$$a_i = A - \left[\frac{A}{P_i}\right] \cdot P_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n;$$

где [ ] – целочисленное деление. Это и есть запись числа в СОК.

Если исходные числа A, B, их сумма $A+B$ и их произведение $A \times B$ находятся в диапазоне $(0,P)$, то результаты операций сложения $A+B$ и умножения $A \times B$ могут быть однозначно представлены соответственно остатками g_i и p_i по тем же основаниям P_i , т.е.

$$A=(a_1, a_2,\ldots,a_n), \qquad B=(b_1, b_2,\ldots, b_n),$$

$$A+B=(g_1, g_2,\ldots, g_n), \qquad AB=(p_1, p_2,\ldots, p_n),$$

$$g_i = a_i + b_i - \left[\frac{a_i + b_i}{P_i}\right] \cdot P_i,$$

$$p_i = a_i \cdot b_i - \left[\frac{a_i \cdot b_i}{P_i}\right] \cdot P_i.$$

где [ ] – целочисленное деление. Это и есть запись числа в СОК.

Такие операции, как деление, сравнение и др., требующие информации о величине всего числа, в СОК выполняются по более сложным алгоритмам. И в этом заключается существенный недостаток данной системы счисления, сдерживающий ее широкое применение в качестве компьютерной арифметики. Однако сегодня даже в самых современных компьютерах при работе с большими и супербольшими числами используют СОК, ибо только эта арифметика позволяет получать результаты вычислений в реальном времени. В таких случаях в качестве оснований СОК применяют величины, близкие 2^m (m–двоичная разрядность компьютера), например $2^{m-1}-1$, 2^{m-1}, $2^{m-1}+1$ и т.д. Компьютер вычисляет результат по одному из модулей за один проход. Другие области применения СОК – помехоустойчивое кодирование, криптография и т.п.

Начиная с 1952 года специалисты многих стран мира, включая и СССР, занимались проблемой повышения скорости выполнения «неудобных» операций в СОК. Особую роль в решении данной проблемы сыграл И.Я. Акушский. Немалый вклад в эту область науки внесли также Д.И. Юдицкий,, В.М. Амербаев, А.А. Коляда.

Иерархические системы счисления.

В конце 80-х – начале 90-х годов родилась идея соединения позиционных и непозиционных систем счисления, т.е. конструирования иерархических систем, которые должны сочетать в себе положительные стороны включенных в них систем счисления и быть свободными от их недостатков [4, 5]. Принцип построения иерархических систем в целом прост. Выбирается некоторая внешняя система счисления $A=<a,W>$, где a - алфавит системы, а $W=W_0$, W_r – ее сигнатура. Сигнатура состоит из двух частей: операционной (W_0), содержащей символы операций системы, и реляционной (W_r), содержащей символы отношений. Цифры, т.е. элементы алфавита A этой системы, записываются в виде слов (кодов) другой (внутренней) системы счисления $B=<b,W>$. Такую систему обозначают $A[B]$.

Рассмотрим пример. Пусть A – десятичная позиционная система, а B – двоичная система. Тогда $a=\{0,1,2,..,9\}$, $b=\{0,1\}$. Двоичное кодирование цифр системы A (десятичной) производится, например, тетрадами:

$$0 \rightarrow 0000,\ 1 \rightarrow 0001, \ldots 9 \rightarrow 1001$$

Тогда число 23 (десятичное) запишется в иерархической системе счисления в виде двух тетрад (0010, 0011). Система *A[B]* в нашем примере – хорошо известная двоично-кодированная десятичная система, применяемая для представления десятичных чисел в современных ЭВМ.

Очевидно, что степень вложенности иерархической системы может быть и более двух. Иначе говоря, существуют иерархические системы счисления $A_0[A_1[A_2 \ldots [A_n] \ldots]$ с основаниями $S_0, S_1, \ldots, S_n$, причем $S_0 > S_1 > \ldots > S_n$. Система счисления (двоичная, восьмеричная, шестнадцатиричная), для которых

$$S_0 = S_1 \cdot 2_1^m, \quad S_1 = S_2 \cdot 2_2^m, \ldots, \quad S_n = S_{n-1} \cdot 2_n^m$$

на уровне представления являются безизбыточными. Если данное условие не выполняется, система избыточна (например, двоично-кодированная десятичная) [4].

Позиционно-остаточная система счисления.

При конструировании иерархических систем счисления большой интерес представляет сочетание систем различных типов. Рассмотрим систему вида *A[B]*, для которой *A* – позиционная система счисления с основанием *S*, а *B* – система счисления в остаточных классах с базовыми модулями $P_1, P_2, \ldots, P_r$, такими, что $P = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_r$. Такую систему называют позиционно-остаточной системой счисления [6].

Неравенство $P \geq S$ – необходимое и достаточное условие однозначного представления цифр $0, 1, \ldots, S-1$ позиционной системы наборами вычетов по модулям $P_1, P_2, \ldots, P_r$. Однако учитывая необходимость корректной реализации арифметических операций в системе *A[B]* (например, формирование переноса и т.п.), можно поставить более жесткое условие $P = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_r \geq 2S$.

Весьма важен выбор величины основания *S* позиционной системы счисления в статочных классах. Отдавая дань двоичной системе счисления, можно выбирать $S \geq 2^m$. В этом случае модули СОК и их произведение должны удовлетворять условию $P \geq 2^{m+1}$. Для человека же наиболее удобны основания, кратные *10 (100, 1000 и т.д.)*.

Двоично-кодированная десятичная система – в известной мере компромисс между человеком и компьютером. Но ее относительная избыточность – 26,5%. Чтобы преодолеть данный недостаток, ряд исследователей предлагают для арифметики с плавающей запятой вместо основания 10 использовать 100 [5]. Тогда для хранения двух десятичных цифр достаточно иметь семь двоичных разрядов вместо восьми (избыточность представления – 22,7%). Переход к основанию 1000 позволяет размещать три десятичные цифры в 10 двоичных разрядах вместо 12 (избыточность представления – 2,35%). Расплата за экономическое представление чисел при переходе к основаниям в вида 10^n – более сложные алгоритмы кодирования и декодирования таких чисел. Однако на уровне машинного представления арифметика все равно остается двоичной.

Арифметические операции в позиционно-остаточной системе счисления выполняются отдельно над цифрами внешней и внутренней системы. Такая ступенчатая реализация операций позволяет практически без изменений переносить алгоритмы внешней системы счисления на операции в системе $A[B]$. При этом «цифровые» операции системы счисления A заменяются процедурами системы счисления B. [5]

Знако-разрядная позиционно-остаточная система счисления.

Еще один пример иерархической системы счисления – знако-разрядная система с основанием S, цифры которой представляются в системе остаточных классов с базовыми модулями $P=P_1, P_2,\dots,P_r$. Достоинство данной системы счисления – высокая скорость выполнения арифметических операций над разрядными цифрами и минимальная длина пути распространения переноса между S-ичными разрядами (не далее соседнего разряда). Высокое быстродействие достигается за счет того, что при суммировании в каждом S-ичном разряде $(S>2)$ одновременно формируются три величины:

$$x_i+y_i,\quad x_i+y_i-1,\quad x_i+y_i+1.$$

Затем одна из них выбирается в качестве результата в зависимости от значения сигнала переноса t_i, принимающего значения $-1,\ 0,\ +1$. [7,8,9,10]

Таким образом, появляется возможность параллельной обработки на нескольких компьютерах больших чисел с основаниями $S=2^m$. Обрабатывать большие числа в «реальном времени» способны даже двоичные персональные компьютеры, работающие по алгоритмам знако-разрядной позиционно-остаточной системы счисления.

Новейшие западные технологии, появляющиеся на российском рынке, в совокупности с отечественными разработками в области недвоичных компьютерных арифметик и синтеза новых способов и алгоритмов ускорения вычислений открывают перед разработчиками вычислительных систем новые возможности.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Стахов А.П**. Введение в алгоритмическую теорию измерений. – М. Сов. Радио, 1997.
2. **Поспелов Д.А.** Арифметические основы вычислительных машин дискретного действия. – М. Высшая школа, 1970.
3. **Акушский И.Я., Юдицкий Д.И.** Машинная арифметика в остаточных классах. М. Сов. Радио, 1968.
4. **Schoichet S.R.** The LISP Machine. Mini-Micro System, 1978, №11(5), p. 68-74.
5. **Евстигнеев В.Г.** S-ичный сумматор. – Электронная техника. Сер. 10, 1986, вып. 5(59), с. 17-19.
6. **Евстигнеев В.Г.** Недвоичная машинная арифметика и специализированные процессоры. – М. МИФИ СЕРВИС и АО «ИНСОФТ», 1992.
7. **Евстигнеев В.Г. Евстигнеева О.В.** Устройство для сложения многоразрядных q-ичных чисел. Авторское свидетельство № 1163321.
8. **Евстигнеев В.Г**. S-ичный сумматор. – Авторское свидетельство № 1273925.
9. **Евстигнеев В.Г. Евстигнеева О.В.** Устройство для сложения n-разрядных чисел в избыточной системе счисления. – Авторское свидетельство № 1188731.
10. **Евстигнеев В.Г.** Сумматор в знакоразрядной позиционно-остаточной системе счисления. – Авторское свидетельство № 1383349.