УДК 62-507.15

О.Н. Музыченко

Методы синтеза логических схем модульного контроля в унитарных непозиционных двоичных кодах

(*Балтийский государственный технический университет «Военмех» им. Д.Ф. Устинова, Санкт-Петербург*)

Рассмотрены методы синтеза логических схем модульного контроля в унитарном параллельном непозиционном двоичном коде. Получены оценки сложности и быстродействия схем, синтезируемых различными методами.

1. Введение

Устройства модульного контроля параллельных двоичных кодов находят достаточно широкое применение [1-5] в современных цифровых системах управления, передачи и переработки дискретной информации, и, прежде всего, в системах специального назначения, к надежности, достоверности функционирования и контролепригодности которых предъявляются высокие требования. Они применяются в качестве средств аппаратного контроля в системах, использующих контроль по модулю [1,3], арифметические [4,5] и ряд других кодов, в устройствах, работающих в системе остаточных классов [2], в аппаратуре кодирования и декодирования помехозащищенных кодов в системах передачи информации.

Известны устройства модульного контроля, работающие в унитарных позиционных двоичных кодах [3]. В работе [6] исследованы методы их синтеза, получены оценки сложности и быстродействия схем, синтезируемых различными методами. Достоинством таких устройств является высокое быстродействие, а основным недостатком - большая сложность, что ограничивает возможности их использования, в особенности при значениях модуля K>5. В статье разрабатываются и исследуются методы синтеза логических схем модульного контроля, функционирующих в унитарных параллельных непозиционных двоичных кодах, получаются оценки сложности и быстродействия синтезируемых схем, позволяющие оценить целесообразность использования таких устройств при проектировании цифровых систем.

2. Основные понятия и определения

В современных цифровых системах используется как числовой, так и кодовый модульный контроль. В случае числового модульного контроля синтезируемая схема должна формировать остаток параллельного двоичного кода по модулю К с учетом весов его разрядов. При кодовом модульном контроле схема формирует остаток по модулю К числа единичных разрядов контролируемого кода, при этом веса всех его разрядов считаются единичными.

Определение 1. Унитарным параллельным непозиционным кодом остатка по модулю K количества единиц двоичного кода $X=\{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n\}$ будем называть код $G=\{g_n^1 g_n^2 \cdots g_n^{K-1}\}$, удовлетворяющий условию:

(1) $$g_n^a(X)=\begin{cases} 1 \text{ при } \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \bmod K \ge a, \\ 0 \text{ при } \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \bmod K < a. \end{cases}$$

Определение 2. Унитарным параллельным непозиционным кодом остатка по модулю K двоичного кода $X=\{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n\}$ будем называть код $U=\{u_n^1 u_n^2 \cdots u_n^{K-1}\}$, удовлетворяющий условию:

(2) $$u_n^a(X)=\begin{cases}1 \text{ при } \left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i\right) \bmod K \ge a,\\ 0 \text{ при } \left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i\right) \bmod K < a.\end{cases}$$

Унитарный параллельный непозиционный код $G(X)$ может быть представлен композицией пороговых равновесных функций [7, 8] вида:

(3) $$g_n^a(X)=\bigvee_{j=0}^{l} F_n^{a+jK}(X)\overline{F_n^{(j+1)K}(X)}, \qquad a=1,2,3,...,K\text{-}1,$$

где l=](*n*-*a*+1)/*K*[-1, а] [- округление в большую сторону до ближайшего целого.

Унитарный параллельный непозиционный код $U(X)$ может быть представлен композицией пороговых неравновесных функций с весами входных переменных, равными весам разрядов входного кода, вида:

(4) $$u_n^a(X)=\bigvee_{j=0}^{l'} F_n^{a+jK}(X)\overline{F_n^{(j+1)K}(X)}, \qquad a=1,2,3,...,K\text{-}1,$$

где $l' = \left]\sum_{i=1}^{n}(w_i - a + 1)/K\right[-1$, а w_i - вес i-го разряда входного кода X.

Представления (3) и (4) следуют из приведенных выше определений кодов $G(X)$ и $U(X)$, а также свойств пороговых функций [7, 9, 10].

3. Методы синтеза логических схем подсчета количества единиц двоичного кода по модулю К в унитарном параллельном непозиционном коде

Функции $g_n^a(X)$ унитарного параллельного непозиционного кода $G(X)$ обладают свойствами, аналогичными свойствам пороговых равновесных функций [11, 12], в том числе следующим свойством

(5) $$g_n^a(X)g_n^b(X)=g_n^a(X) \quad \text{при} \quad a>b.$$

Это позволяет адаптировать разработанные для синтеза пороговых схем методы декомпозиции [11] и факторизации [12, 13] при проектировании схем модульного контроля.

3.1. Декомпозиционный метод

Функции $g_n^a(X)$ могут быть представлены в виде следующей композиции функций разложения

(6)

$$g_n^a(X)=\bigvee_{j=0}^{l}\left(\left\{\bigvee_{\{A_r^j\}} g_{m_1}^{a_1}(X_1)g_{m_2}^{a_2}(X_2)\ldots g_{m_r}^{a_r}(X_r)\right\}\&\overline{\left\{\bigvee_{\{B_r^j\}} g_{m_1}^{b_1}(X_1)g_{m_2}^{b_2}(X_2)\ldots g_{m_r}^{b_r}(X_r)\right\}}\right)=$$

$$\bigvee_{j=0}^{l}\Phi_n^{a+jK}(X)\&\overline{\Phi}_n^{(j+1)K}(X),$$

где $l=\left]\sum_{i=1}^{r}(h_i-a+1)/K\right[-1$, а $h_i=\min(K-1,m_i)$;

r - параметр разложения;

$g_{m_i}^{a_i}(X_i)$, $g_{m_i}^{b_i}(X_i)$ - функции разложения;

$\{A_r^j\},\{B_r^j\}$ - множества всех r-мерных векторов, элементы которых удовлетворяют условиям:

(7) $$\sum_{i=1}^{r}a_i=a+jK,$$

(8) $$\sum_{i=1}^{r}b_i=(j+1)K.$$

$A_r=\{a_1,\ldots,a_r\}$ - r - мерный вектор;

a_i - элемент r-мерного вектора A_r, являющийся индексом функции $g_{m_i}^{a_i}(X_i)$;

$B_r=\{b_1,\ldots,b_r\}$ - r - мерный вектор;

b_i - элемент r-мерного вектора B_r, являющийся индексом функции $g_{m_i}^{b_i}(X_i)$;

X_i - множества переменных функций разложения $g_{m_i}^{a_i}(X_i)$ и $g_{m_i}^{b_i}(X_i)$, удовлетворяющие условиям:

(9) $$X_1\cup X_2\cup\ldots\cup X_r=X,$$

(10) $$X_i\cap X_j=\varnothing \quad \text{при} \quad i\neq j.$$

Справедливость разложения (6) вытекает из следующего. В [9] доказано, что любая пороговая равновесная функция алгебры логики может быть представлена композицией функций разложения, зависящих от меньшего числа переменных, вида

(11) $$F_n^a(X) = \bigvee_{\{A_r\}} F_{m_1}^{a_1}(X_1) F_{m_2}^{a_2}(X_2) \ldots F_{m_r}^{a_r}(X_r),$$

где $\{A_r\}$- множество всех r -мерных векторов, удовлетворяющих условию

(12) $$\sum_{i=1}^{r} a_i = a \qquad (a_i \geq 0).$$

С учетом (11) справедливость разложения (6) при $s(X_i) < K$, следует из определения (1) унитарного параллельного непозиционного кода остатка и представления (3), так как в этом случае $g_{m_i}^{a_i}(X_i) = F_{m_i}^{a_i}(X_i)$. При $s(X_i) > K$ разложение (6) также остается справедливым, поскольку свойства системы функций $g_m^a(X_i)$ полностью аналогичны свойствам системы функций $F_m^a(X_i)$. При этом логическая схема, работа которой описывается системой уравнений вида (6) при a=1,2,...,K-1, представляет собой два последовательно соединенных блока, первый из которых выполняет операцию суммирования r унитарных параллельных непозиционных кодов, а второй-свертку кода суммы по модулю K.
Возможно эквивалентное (6) представление вида:

(13) $$g_n^a(X) = \bigoplus_{j=0}^{l} \left(\Phi_n^{a+jK}(X) \oplus \overline{\Phi}_n^{(j+1)K}(X)\right).$$

Из изложенного следует, что схема формирования остатка количества единиц двоичного кода X по модулю K может быть синтезирована [14] в порядке, описанном в [12] для случая пороговых равновесных функций, т.е. путем последовательной совместной декомпозиции системы функций $G(X)$, описывающей работу схемы, на основе обобщенного разложения (6) или (13). Декомпозиция осуществляется до получения $\sigma(X_t) < K$, при этом синтезируемый блок представляет собой фундаментальный многопороговый элемент [11], реализующий систему из $\sigma(X_t)$ пороговых равновесных функций с порогами от a_{min}=1 до $a_{max}=\sigma(X_t)$.

Очевидно, что глубина и сложность синтезируемых схем зависят от выбора параметров разложения r и мощности подмножеств переменных X_i на каждом шаге декомпозиции, т.е. от порядка декомпозиции, а вывод о минимальной сложности схем, синтезируемых методом декомпозиции с параметром r=2, сделанный в [11] для случая пороговых равновесных и элементарных симметричных функций, справедлив и в данном случае.

Возможны следующие типы декомпозиции. Будем называть декомпозицию детерминированной, если на всех шагах r=*const*, в противном случае будем называть ее вероятностной. Будем называть декомпозицию регулярной, если на каждом шаге множества переменных систем функций разложения удовлетворяют условию $\left|s\left(X_i\right)-s\left(X_j\right)\right|\leq 1$, в противном случае будем называть ее нерегулярной.

Все возможные варианты разложения по переменным функций $g_n^a(X)$ являются частными случаями представления (6), получаемыми при определенных значениях параметра разложения r и мощности множеств переменных X_i. Так при $r\geq 2$ и $s\left(X_i\right)=s\left(X_2\right)=\ldots=s\left(X_{r-1}\right)=1$ из (6) получаем все виды разложения по переменным, в том числе при r =2 - тривиальное разложение.

Выбор вида и порядка декомпозиции позволяет формировать требуемую структуру схемы, регулировать ее сложность и быстродействие. Оценим сложность синтезируемых схем.

Утверждение 1. Логическая схема формирования остатка количества единиц двоичного кода по модулю К в унитарном параллельном непозиционном коде, синтезированная методом разложения по переменным содержит

(14) $$L\left(G(n)\right)=\begin{cases} n^2-n\ , & при \quad n<K, \\ (K-1)^2-(K-1)+(n-K+1)(3K-2), & при \quad n\geq K, \end{cases}$$

элементов И, ИЛИ, НЕ.

Доказательство. При $n<K$ $L(G(n))$ представляет собой фундаментальный многопороговый элемент , сложность которого определяется доказанной в [11] оценкой вида $L(F(n))=n^2-n$, а при n

$\geq K$ $L(G(n))=L(F(K\text{-}1))+(n\text{-}K+1)l_1=(K\text{-}1)^2\text{-}(K\text{-}1)+(n\text{-}K+1)(3K\text{-}2)$, где l_1 - количество логических элементов, необходимых для реализации уравнения (6) при сформированных функциях разложения. Что и требовалось доказать.

Утверждение 2. Логическая схема формирования остатка количества единиц двоичного кода по модулю К в унитарном параллельном непозиционной коде, синтезированная методом детерминированной декомпозиции с параметром r=2, содержит

(15)
$$L(G(n)) = \begin{cases} n^2 - n & \text{при} \quad n < K, \\ n^2 & \text{при} \quad K \leq n \leq 2K-2, \\ L(G(m_1)) + L'(G(m_2)) + 2(K^2 - K) & \text{при} \quad n > 2K-2, \end{cases}$$

элементов И, ИЛИ, НЕ, где m_1, $m_2 \geq K$-1.

Доказательство. При $n<K$ $L(G(n))$ представляет собой фундаментальный многопороговый элемент , сложность которого определяется доказанной в [11] оценкой вида $L(F(n))=n^2\text{-}n$. При $K \leq n \leq 2K\text{-}2$ $L(G(n))=L(F(n))+l_2=n^2\text{-}n+n$, где $l_2=(n\text{-}K)+(K\text{-}1)+1=n$ - количество логических элементов, необходимых для реализации уравнения (6) при сформированных функциях разложения. При $n>2K\text{-}2$ $L(G(n))=L(G(m_1))+L(G(m_2))+l_3+l_4$, где $l_3=L(F(2K\text{-}2))\text{-}2L(F(K\text{-}1))= 2K^2\text{-}4K+2$ - количество элементов, необходимых для формирования всех конъюнкций функций разложения в (6), а $l_4=2K\text{-}2$ - количество элементов, необходимых для реализации уравнения (6) при сформированных конъюнкциях функций разложения. Что и требовалось доказать.

Соответствующие оценкам (14) и (15) графики 1 и 2 представлены на рис. 1 для K=3,5,7 соответственно. На рис. 2 показан пример схемной реализации устройства контроля количества единиц параллельного двоичного кода по модулю K=5, синтезированного методом регулярной детерминированной декомпозиции с параметром r=2.

3.2. Факторизационные методы синтеза

Рассматриваемые функции $g_n^a(X)$ обладают свойством (5), аналогичным свойству пороговых равновесных функций. Это позволяет адаптировать разработанный в [12, 13] методы первичной и вторичной факторизации , а также предложенные в [15] однородные и регулярные структуры, для синтеза схем формирования остатка количества единиц двоичного кода по модулю K .

3.2.1. Первичная факторизация

Уменьшение сложности синтезируемой схемы путем факторизации системы уравнений вида (6) или (13) , полученных в результате декомпозиции, существующими методами [16,17] невозможно из-за отсутствия общих факторов. Однако, с учетом свойства (5) функций $g_n^a(X)$ общие факторы могут быть сформированы искусственно.

Для этого в представлении функций $\Phi_n^a(X)$ из (6) или (13) выделим группу однотипных конъюнкций, для которых все векторы A'_r получаются перестановкой элементов множества $\{a_1,\ldots,a_r, b_1,\ldots,b_l\}$, где $r+l \le r, \quad a = const, \quad a < b, \quad b_{j+1} \ge b_j$.

представлена в виде

$$\begin{aligned}
&\bigvee_{\{A'_r\}} g_{m_1}^{a_1}(X_1)\ldots g_{m_r}^{a_r}(X_r) = \Big\{ g_{m_1}^{a}(X_1)\ldots g_{m_r}^{a}(X_r)\, g_{m_{r+1}}^{b_1}(X_{r+1})\ldots g_{m_{r+l}}^{b_l}(X_{r+l}) \vee \\
&\ldots \vee g_{m_1}^{a}(X_1)\ldots g_{m_r}^{a}(X_r)\, g_{m_{r+1}}^{b_l}(X_{r+1})\ldots g_{m_{r+l}}^{b_1}(X_{r+l}) \vee \ldots\ldots\ldots\ldots \vee g_{m_{r-r-l+1}}^{b_l}(X_{r-r-l+1})\ldots \\
&\ldots g_{m_{r-r}}^{b_1}(X_{r-r})\, g_{m_{r-r+1}}^{a}(X_{r-r+1})\ldots g_{m_r}^{a}(X_r) \Big\} = \Big\{ g_{m_1}^{a}(X_1)\, g_{m_2}^{a}(X_2)\ldots g_{m_{r+l}}^{a}(X_{r+l}) \vee \ldots \\
&\vee g_{m_{r-r-l+1}}^{a}(X_{r-r-l+1})\ldots g_{m_{r-1}}^{a}(X_{r-1})\, g_{m_r}^{a}(X_r) \Big\} \& \Big\{ g_{m_{r+1}}^{b_1}(X_{r+1})\, g_{m_{r+2}}^{b_2}(X_{r+2})\ldots \\
&\ldots g_{m_{r+l}}^{b_l}(X_{r+l}) \vee \ldots\ldots\ldots\ldots \vee g_{m_{r+1}}^{b_l}(X_{r+1})\ldots g_{m_{r+l-1+}}^{b_2}(X_{r+l-1})\, g_{m_{r+l}}^{b_1}(X_{r+l}) \vee \ldots \\
&\ldots \vee g_{m_{r-r-l+1}}^{b_l}(X_{r-r-l+})\ldots g_{m_{r-r-1}}^{b_2}(X_{r-r-1})\, g_{m_{r-r}}^{b_1}(X_{r-r}) \Big\}
\end{aligned} \tag{16}$$

Очевидно, что использование преобразования (16) обеспечивает уменьшение сложности реализации функций $\Phi_n^a(X)$ и, следовательно, функций $g_n^a(X)$, поскольку разность числа логических операций И,ИЛИ в его левой и правой частях составляет

$$\Delta = C_r^l(r-l) - r ,$$

где l - число функций разложения с порогом b в каждой конъюнкции.

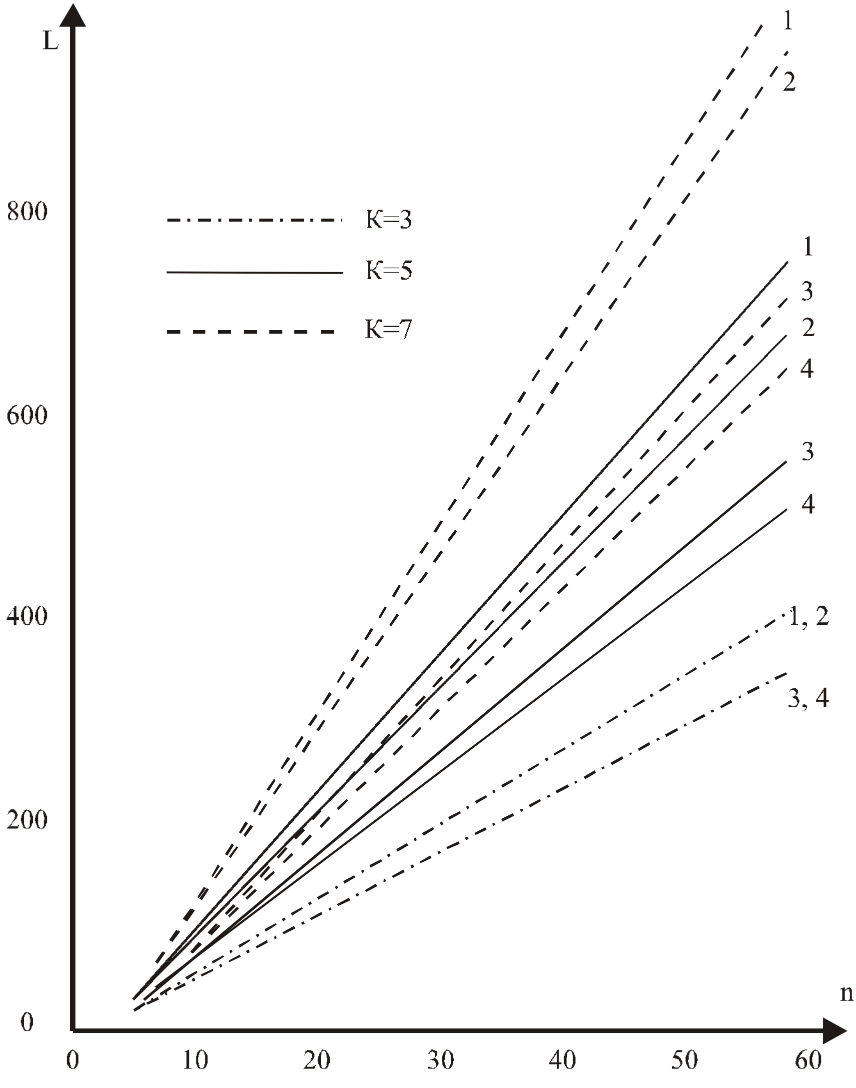

Рис. 1. Зависимость сложности схем подсчета количества единиц параллельного двоичного кода по модулю *К* от его разрядности *n*

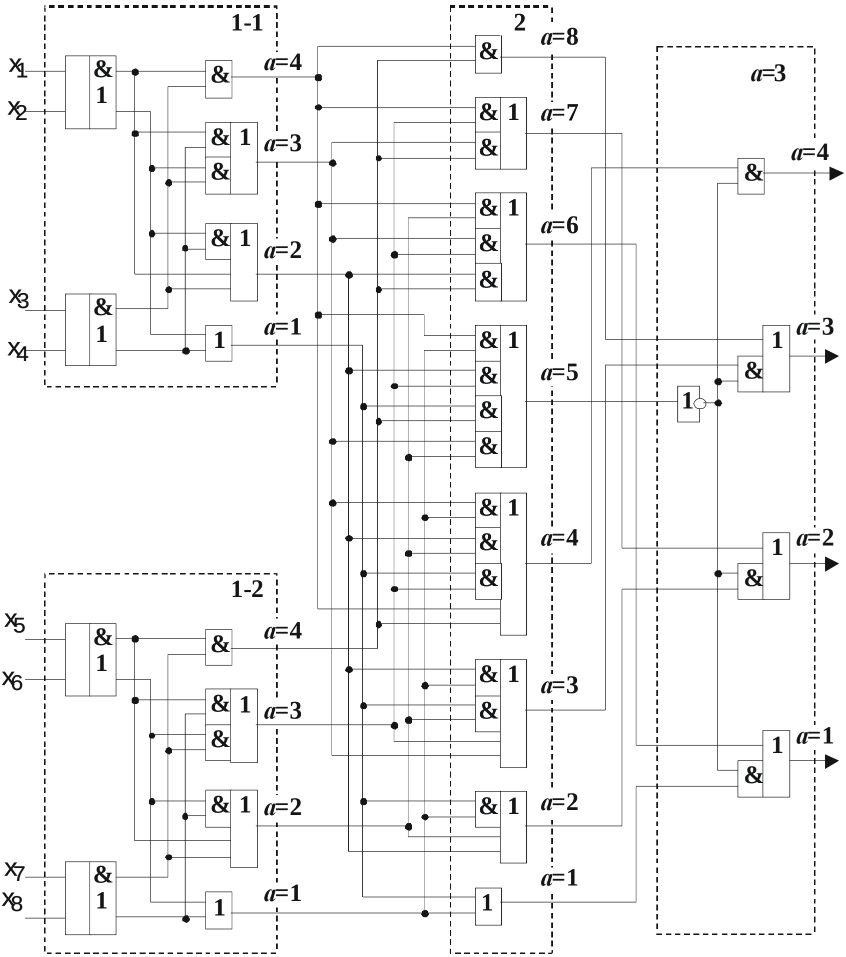

Рис. 2. Устройство подсчета количества единиц 8-разрядного двоичного кода по модулю *K*=5 в унитарном параллельном непозиционном коде, синтезированное методом регулярной детерминированной декомпозиции (*r*=2)

Данная группа конъюнкций с учетом (5) может быть
(*t*-1) - кратное выполнение преобразования (16), где *t* - количество различных значений индексов a_j векторов A'_r, приводит к представлению

(17) $$\bigvee_{\{A'_r\}} g^{a_1}_{m_1}(X_1)\, g^{a_2}_{m_2}(X_2)\, g^{a_r}_{m_r}(X_r) = \mathop{\&}_{j=1}^{t} F^{p_j}_{r}\left(g^{a_j}_{m_1}(X_1), g^{a_j}_{m_2}(X_2), \dots, g^{a_j}_{m_r}(X_r)\right)$$

где $\sum\limits_{j=1}^{t} \tilde{p}_j a_j = \sum\limits_{i=1}^{r} a_i = a$, $\tilde{p}_j = p_j - p_{j+1}$, $p_{t+1} = 0$,

а $F_r^{p_j}(Y)$ - пороговая равновесная функция r переменных с порогом p_j.

Представления (17) имеют для различных $\Phi_n^a(X)$ общие факторы вида $F_r^{p_j}(Y)$, а при $r>2$ обеспечивают уменьшение сложности реализации отдельной функции $\Phi_n^a(X)$.

При $r=2$ преобразование (17) имеет вид

(18) $g_{m_1}^{a}(X_1) g_{m_2}^{b}(X_2) \vee g_{m_1}^{b}(X_1) g_{m_2}^{a}(X_2) = g_{m_1}^{a}(X_1) g_{m_2}^{a}(X_2) \left\{ g_{m_1}^{b}(X_1) \vee g_{m_2}^{b}(X_2) \right\}$.

При $r=3$ получаем преобразования следующих четырех видов:

(19)
$$g_{m_1}^{a}(X_1) g_{m_2}^{a}(X_2) g_{m_{13}}^{b}(X_3) \vee g_{m_1}^{a}(X_1) g_{m_2}^{b}(X_2) g_{m_{13}}^{a}(X_3) \vee g_{m_1}^{b}(X_1) g_{m_2}^{a}(X_2)$$
$$g_{m_{13}}^{a}(X_3) = g_{m_1}^{a}(X_1) g_{m_2}^{a}(X_2) g_{m_3}^{a}(X_3) \left\{ g_{m_1}^{b}(X_1) \vee g_{m_2}^{b}(X_2) \vee g_{m_3}^{b}(X_3) \right\},$$

(20)
$$g_{m_1}^{a}(X_1) g_{m_2}^{b}(X_2) g_{m_{13}}^{b}(X_3) \vee g_{m_1}^{b}(X_1) g_{m_2}^{a}(X_2) g_{m_{13}}^{b}(X_3) \vee g_{m_1}^{b}(X_1) g_{m_2}^{b}(X_2)$$
$$g_{m_{13}}^{a}(X_3) = g_{m_1}^{a}(X_1) g_{m_2}^{a}(X_2) g_{m_3}^{a}(X_3) \left\{ g_{m_1}^{b}(X_1) g_{m_2}^{b}(X_2) \vee g_{m_1}^{b}(X_1) g_{m_3}^{b}(X_3) \vee \right.$$
$$\left. \vee\, g_{m_2}^{b}(X_2) g_{m_3}^{b}(X_3) \right\},$$

(21)
$$g_{m_1}^{a}(X_1) g_{m_2}^{b}(X_2) \vee g_{m_1}^{a}(X_1) g_{m_3}^{b}(X_3) \vee g_{m_2}^{a}(X_2) g_{m_{13}}^{b}(X_3) \vee g_{m_1}^{b}(X_1) g_{m_2}^{a}(X_2)$$
$$\vee\, g_{m_1}^{b}(X_1) g_{m_{13}}^{a}(X_3) \vee g_{m_2}^{b}(X_2) g_{m_{13}}^{a}(X_3) = \left\{ g_{m_1}^{a}(X_1) g_{m_2}^{a}(X_2) \vee \right.$$
$$\left. \vee\, g_{m_1}^{a}(X_1) g_{m_3}^{a}(X_3) \vee g_{m_2}^{a}(X_2) g_{m_3}^{a}(X_3) \right\} \left\{ g_{m_1}^{b}(X_1) \vee g_{m_2}^{b}(X_2) \vee g_{m_3}^{b}(X_3) \right\},$$

(22)
$$g_{m_1}^{a}(X_1) g_{m_2}^{b}(X_2) g_{m_{13}}^{g}(X_3) \vee g_{m_1}^{a}(X_1) g_{m_2}^{g}(X_2) g_{m_{13}}^{b}(X_3) \vee g_{m_1}^{b}(X_1) g_{m_2}^{a}(X_2) g_{m_{13}}^{g}(X_3) \vee$$
$$g_{m_1}^{g}(X_1) g_{m_2}^{a}(X_2) g_{m_{13}}^{b}(X_3) \vee g_{m_1}^{b}(X_1) g_{m_2}^{g}(X_2) g_{m_{13}}^{a}(X_3) \vee g_{m_1}^{g}(X_1) g_{m_2}^{b}(X_2) g_{m_{13}}^{a}(X_3) =$$
$$g_{m_1}^{a}(X_1) g_{m_2}^{a}(X_2) g_{m_3}^{a}(X_3) \left\{ g_{m_1}^{b}(X_1) g_{m_2}^{b}(X_2) \vee g_{m_1}^{b}(X_1) g_{m_3}^{b}(X_3) \vee g_{m_2}^{b}(X_2) g_{m_3}^{b}(X_3) \right\}$$
$$\left\{ g_{m_1}^{g}(X_1) \vee g_{m_2}^{g}(X_2) \vee g_{m_3}^{g}(X_3) \right\} \qquad (a < b < g).$$

Аналогичные представления могут быть получены для любого r.

С учетом (17) функции $\Phi_n^a(X)$ из (6) и (13) могут быть представлены в виде

(23) $$\Phi_n^a(X)=\bigvee_{\{A_r^j\}} g_{m_1}^{a_1}(X_1)g_{m_2}^{a_2}(X_2)\dots g_{m_r}^{a_r}(X_r)=$$

$$\bigvee_{\{A_r^j\}'} \mathop{\&}_{j=1}^{t} F_r^{p_j}\left(g_{m_1}^{a_j}(X_1), g_{m_2}^{a_j}(X_2), \dots, g_{m_r}^{a_j}(X_r)\right)$$

где $\sum_{j=1}^{t} \tilde{p}_j a_j = \sum_{i=1}^{r} a_i = a,\ \tilde{p}_j = p_j - p_{j+1},\ p_{t+1} = 0,\ p_{j+1} < p_j,\ a_{j+1} > a_j$,

$F_r^{p_j}(Y)$ - пороговая равновесная функция r переменных с порогом $p_{j,}$;

$\{A_r^j\}'$ - множества типов r-мерных векторов $A_r^j = \{a_1, \dots, a_r\}$, элементы которых удовлетворяют условию (7);

$A_r^j = \{a_1, \dots, a_r\}$ - r - мерный вектор;

a_i - элемент r-мерного вектора A_r^j, являющийся индексом функции $g_{m_i}^{a_i}(X_i)$;

t - число ненулевых элементов вектора A_r^j ($t \le r$).

Множество $\{A_r^j\}$ может быть получено из $\{A_r^j\}'$ путем замены каждого из векторов $A_r^j \in \{A_r^j\}'$ множеством векторов, получаемых из него перестановкой элементов, т.е. $\{A_r^j\}' \subset \{A_r^j\}$.

При r =2 из (23) получаем следующее представление функции $\Phi_n^a(X)$:

(24)
$$\Phi_n^a(X) = \bigvee_{\{A_2\}'} g_{m_1}^{a}(X_1) g_{m_2}^{a}(X_2) \left\{ g_{m_1}^{a-a}(X_1) \vee g_{m_2}^{a-a}(X_2) \right\} =$$
$$= \bigvee_{\{i\}} F_2^2\left(g_{m_1}^{i}(X_1), g_{m_{12}}^{i}(X_2)\right) F_2^1\left(g_{m_1}^{a-i}(X_1), g_{m_{12}}^{a-i}(X_2)\right) \vee f_\Delta,$$

где : $\{A_2\}'$ - множество типов двумерных векторов A_2 ;

$i \in \{1,2,\dots,\mu\}$;

$\mu = \min\{]a/2[-1, K-1,]n/2[-1\}$;

$$
(25)\quad f_\Delta = \begin{cases} F_2^2\left(g_{m_1}^{a/2}(X_1), g_{m_2}^{a/2}(X_2)\right) \vee F_2^1\left(g_{m_1}^{a}(X_1), g_{m_2}^{a}(X_2)\right) & \\ \qquad\qquad \text{при} \quad a \le m_1, m_2 \quad \text{и} \quad a = 2]a/2[, & \\ F_2^2\left(g_{m_1}^{a/2}(X_1), g_{m_2}^{a/2}(X_2)\right) \ \text{при} \quad a > m_1, m_2 \quad \text{и} \quad a = 2]a/2[, & \\ F_2^1\left(g_{m_1}^{a}(X_1), g_{m_2}^{a}(X_2)\right) \ \text{при} \quad a \le m_1, m_2 \quad \text{и} \quad a \ne 2]a/2[, & \\ 0 \qquad \text{при} \quad a > m_1, m_2 \quad \text{и} \quad a \ne 2]a/2[. & \end{cases}
$$

При m=0 в представлении (24) $\Phi_n^a(X) = f_\Delta$.

Наибольшее уменьшение сложности схем достигается при факторизации логических уравнений, полученных в результате регулярной декомпозиции. В частном случае разложения по переменным факторизация, обеспечивающая уменьшение сложности схем, невозможна.

Использование первичной факторизации уравнений (6) приводит к получению системы логических уравнений вида:

$$
(26)\qquad g_n^a(X) = \bigvee_{j=0}^{l}\left(\left\{\bigvee_{\{A_i^j\}'}\left(\mathop{\&}_{r=1}^{t} F_r^{p_r}\left(g_{m_{11}}^{a_r}(X_1) g_{m_2}^{a_r}(X_2) \mathbf{K}\, g_{m_r}^{a_r}(X_1)\right)\right)\right\} \& \overline{\left\{\bigvee_{\{B_i^j\}'}\left(\mathop{\&}_{r=1}^{t} F_r^{p_r}\left(g_{m_{11}}^{b_r}(X_1) g_{m_2}^{b_r}(X_2) \mathbf{K}\, g_{m_r}^{b_r}(X_1)\right)\right)\right\}}\right)
$$

$$
= \bigvee_{j=0}^{l} \Phi_n^{a+jK}(X)\, \overline{\Phi}_n^{(j+1)K}(X)
$$

или эквивалентной ей системы уравнений вида (13),

где $t \le r$, $p_{j+1} < p_j$, $a_\rho \ge 0$, $a_{\rho+1} > a_\rho$, $b_\rho \ge 0$, $b_{\rho+1} > b_\rho$,

$$
\sum_{r=1}^{t} \tilde{p}_r a_r = \sum_{i=1}^{r} a_i = a + jK;
$$

$$
\sum_{r=1}^{t} \tilde{p}_r b_r = \sum_{i=1}^{r} b_i = (1+j)K; \quad \tilde{p}_r = p_r - p_{r+1}, \quad p_{t+1} = 0 \ ,
$$

$\{A_r^j\}'$, $\{B_r^j\}'$ множества типов r-мерных векторов, удовлетворяющих условиям (7) и (8) соответственно.

При r=2 уравнение (26) имеет вид:

$$
g_n^a(X) = \left(\bigvee_{\{A_r^0\}}\left\{g_{m_1}^{a}(X_1) g_{m_2}^{a}(X_2)\right\}\left\{g_{m_1}^{a-a}(X_1) \vee g_{m_2}^{a-a}(X_2)\right\}\right) \&
$$

(27)
$$\overline{\left(\bigvee_{\{B_i^0\}}\left\{g_{m_1}^{b}(X_1)g_{m_2}^{b}(X_2)\right\}\left\{g_{m_1}^{K-b}(X_1)\vee g_{m_2}^{K-b}(X_2)\right\}\right)\vee \left(\bigvee_{\{A_r^1\}}\left\{g_{m_1}^{a}(X_1)g_{m_2}^{a}(X_2)\right\}\left\{g_{m_1}^{a+K-a}(X_1)\vee g_{m_2}^{a+K-a}(X_2)\right\}\right)}=$$

$$=\left(\bigvee_{\{i\}_a} F_2^2\left\{g_{m_1}^{i}(X_1)g_{m_2}^{i}(X_2)\right\}F_2^1\left\{g_{m_1}^{a-i}(X_1)g_{m_2}^{a-i}(X_2)\right\}\right)\&$$

$$\overline{\left(\bigvee_{\{i\}_K} F_2^2\left\{g_{m_1}^{i}(X_1)g_{m_2}^{i}(X_2)\right\}F_2^1\left\{g_{m_1}^{K-i}(X_1)g_{m_2}^{K-i}(X_2)\right\}\right)}\vee$$

$$\left(\bigvee_{\{i\}_{a+K}} F_2^2\left\{g_{m_1}^{i}(X_1)g_{m_2}^{i}(X_2)\right\}F_2^1\left\{g_{m_1}^{a+k-i}(X_1)g_{m_2}^{a+k-i}(X_2)\right\}\right)=$$

$$\Phi_n^a(X)\&\ \overline{\Phi}_n^K(X)\vee\ \Phi_n^{a+K}(X),$$

где:

$$\{i\}_a\in\ \{0,1,2,\ \mathbf{K}\ ,\ \min\left([n/2],[a/2]\right)\};$$

$$\{i\}_K\in\ \{1,2,\ \mathbf{K}\ ,\ \min\left([n/2],[K/2]\right)\};$$

$$\{i\}_{a+K}\in\ \{a+1,\mathbf{K}\ ,\min\left([(a+K)/2],[n/2]\right)\}.$$

Схема устройства подсчета единиц параллельного двоичного 24-х разрядного кода по модулю K=5, синтезированная методом первичной факторизации (r=3), представлена на рис. 3.

Оценим сложность схем, синтезируемых рассмотренным методом первичной факторизации.

Утверждение 4. Логическая схема формирования остатка количества единиц двоичного кода по модулю K в унитарном параллельном непозиционном коде, синтезированная методом факторизации (r=2) содержит

(28)
$$L\ (G(n))=\begin{cases} L(F(n)) & \text{при}\quad n\langle K,\\ L(F(n))+n & \text{при}\quad K\le n\le 2K-2,\\ L(G(m_1))+L(G(m_2))+L(F(2K-2))-2L(F(K-1)+2K-2 & \\ & \text{при}\quad m_1,m_2>K-1\end{cases}$$

элементов И, ИЛИ, НЕ, где $L(F(n))$ - сложность реализации фундаментального многопорогового элемента $F(n)$, определенная для данного метода факторизации (соответствующие оценки приведены в [12,13]) .

Доказательство. Случай $n<K$ очевиден, поскольку синтезируемая схема представляет собой фундаментальный многопороговый логический элемент. При $K \le n \le 2K$-2 сложность синтезируемой схемы составляет $L(G(n))=L(F(n))+l_1$, где $l_1=n$ - количество элементов, необходимых для реализации системы уравнений (27) при сформированных функциях $\Phi_n^a(X)$. При $n>2K$-2 сложность синтезируемой схемы составляет $L(G(n))=L(G(m_1))+L(G(m_2))+l_1+l_2$, где $l_1=L(F(2K\text{-}2))\text{-}2L(F(K\text{-}1))$ - количество элементов, необходимых для реализации блока сложения унитарных двоичных непозиционных кодов, в случае синтеза используемым методом факторизации системы уравнений функций $\Phi_n^a(X)$ при сформированных функциях разложения $g_{m_i}^{a_i}(X_i)$, а $l_2=2K$-2 - количество элементов, необходимых для реализации системы уравнений (27) при сформированных функциях $\Phi_n^a(X)$.

Следствие 1. Логическая схема формирования остатка количества единиц двоичного кода по модулю K в унитарном параллельном непозиционном коде, синтезированная методом первичной факторизации (r=2) содержит:

$$L(G(n)) = L(G(m_1)) + L(G(m_2)) + \Delta L_1 \tag{29}$$

элементов И, ИЛИ, НЕ, где m_1, $m_2>K$-1 или m_1=]n/2[,

$$\Delta L_1 = \begin{cases} \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right) & при \quad n = 2]n/2[\quad и \quad n < K, \\ \frac{(n+1)}{2}\left(\frac{(n+1)}{2}+1\right)-2 & при \quad n \ne 2]n/2[\quad и \quad n < K, \\ \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)+n & при \quad n = 2]n/2[\quad и \quad K \le n \le 2K-2, \\ \frac{(n+1)}{2}\left(\frac{(n+1)}{2}+1\right)+n-2 & при \quad n \ne 2]n/2[\quad и \quad K \le n \le 2K-2, \\ K^2+K-2 & при \quad n > 2K-2.. \end{cases} \tag{30}$$

Оценка (30) получается из (28) с учетом представления (27).

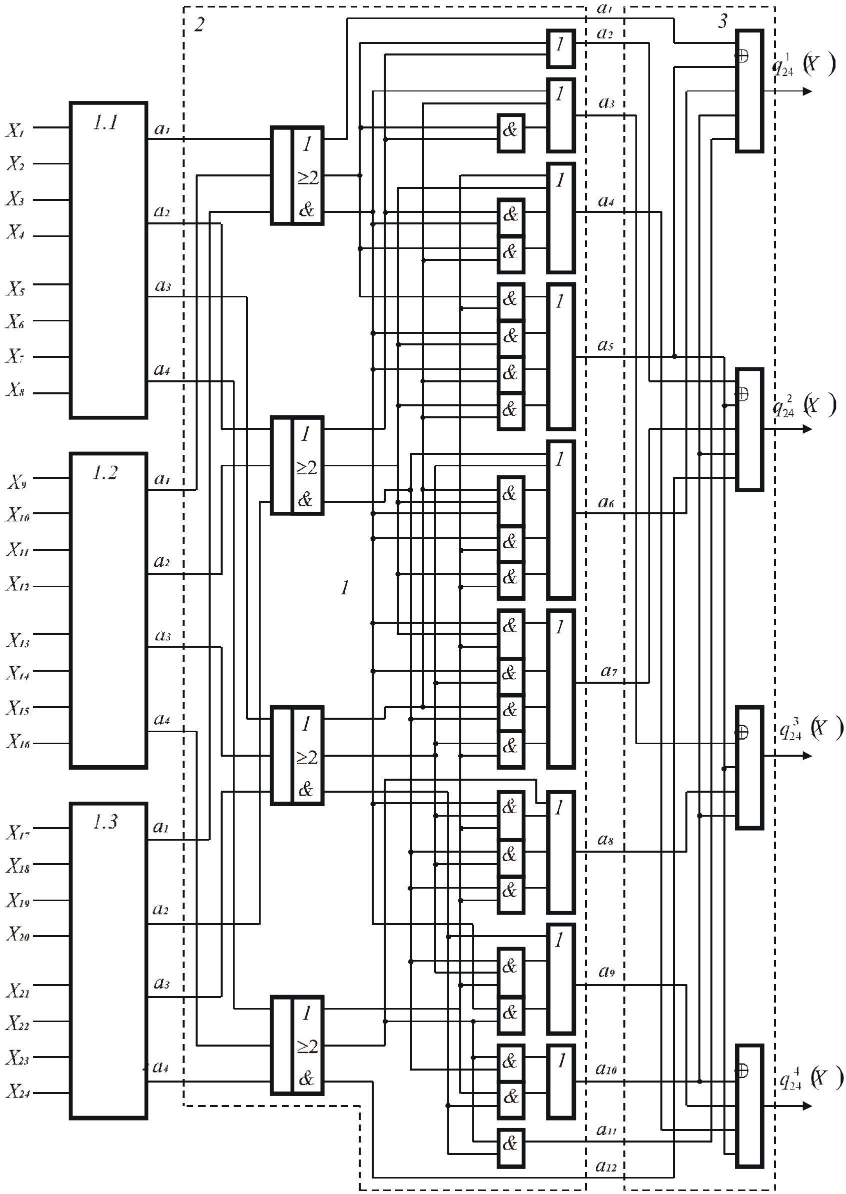

Рис. 3. Схема подсчета количества единиц 24-разрядного двоичного кода по модулю *K*=5 в унитарном непозиционном коде, синтезированная методом первичной факторизации (*r*=3)

3.2.2. Вторичная факторизация

Дальнейшее уменьшение сложности схем модульного контроля возможно [18] за счет совместной реализации систем функций $\Phi_n^a(X)$. Для этого представим функцию $\Phi_n^a(X)$ в виде

(31) $$\Phi_n^a(X) = \bigvee_{i=1}^{t+1} D_i = F_t^1(D_1, D_2, \ldots, D_t) \vee D_{t+1}.$$

В этом случае система функций $\Phi_n^a(X)$ при $a = \{a, a+1, \ldots, a+t-1\}$ может быть реализована в виде

(32) $$\begin{cases} \Phi_n^a(X) = F_t^1(D_1, D_2, \ldots, D_t) \vee D_{t+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_n^{a+i}(X) = F_t^{i+1}(D_1, D_2, \ldots, D_t) \vee \Delta F_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_n^{a+t-1}(X) = F_t^t(D_1, D_2, \ldots, D_t) \vee \Delta F_{t-1} \end{cases}$$

где $\Delta F_i = \Phi_n^{a+i}(X) \,\&\, \overline{F}_t^{i+1}(D_1, \ldots, D_t)$.

Проблема заключается в определении оптимального состава дизъюнкций $D_1, \ldots, D_r$, обеспечивающих представление функций системы $\{\Phi_n^{\epsilon}(X)\}$ наименьшей сложности.

Результаты исследований показывают, что при r=2 для любых n и K, а при r=3 по крайней мере для K<17 , могут быть сформированы представления (31), для которых $D_{t+1} = 0$ при любых a, t. В случае r=2 оптимальным является представление уравнения $\Phi_n^a(X)$ системы (32) вида

(33) $$\Phi_n^a(X) = \bigvee_{i=1}^{t} \left\{ \bigvee_{j=j_{\min}}^{x} g_{m_1}^{tj+i-1}(X_1)\, g_{m_2}^{tj+i-1}(X_2) \left(g_{m_1}^{a-tj-i+1}(X_1) \vee g_{m_1}^{a-tj-i+1}(X_1) \right) \right\},$$

где $X = \left[\dfrac{a-2i+2}{2t} \right]$, $m = \min\{m_1, K-1\}$, $m_1 = \,]n/2[$, а

$$j_{\min} = \begin{cases} [(a-m)/t] & \text{при} \quad m < a, \\ 0 & \text{при} \quad m \ge a. \end{cases}$$

При этом в (32) $D_{t+1} = 0$, а $\Delta F_i = \Delta F_i^1 \vee \Delta F_i^2$, где

(34) $$\Delta F_i^1 = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad a+i>m, \\ \overset{r_1}{\underset{j=1}{\vee}} g_{m_1}^{i-j}(X_1) g_{m_2}^{i-j}(X_2) \left\{ g_{m_1}^{a+j}(X_1) \vee g_{m_2}^{a+j}(X_2) \right\} & \text{при } a+i \le m, \end{cases}$$

$$r_1 = \min\{i, m-a\},$$

(35) $$\Delta F_i^2 = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad r_2 > i \quad \textit{или} \quad t=2 \ \textit{и} \ a = 2]a/2[, \\ \overset{i}{\underset{j=r_2}{\vee}} g_{m_1}^{b}(X_1) g_{m_2}^{b}(X_2) \left\{ g_{m_1}^{a+i-b}(X_1) \vee g_{m_2}^{a+i-b}(X_2) \right\} & \textit{при} \quad t>2 \, \textit{или} \ a \ne 2]a/2[, \end{cases}$$

$$b = \left[\frac{a+j}{2}\right], \qquad r_2 = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad a \ne 2]a/2[, \\ 2 & \text{при} \quad a = 2]a/2[. \end{cases}$$

Возможен другой вариант вторичной факторизации систем функций $\Phi_n^a(X)$, использующий их представление вида

(36) $$\begin{cases} \Phi_n^a(X) = F_t^1(D_1 \vee \Delta D_1, D_2 \vee \Delta D_2, \dots, D_t \vee \Delta D_t) \vee D_{t+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Phi_n^{a+i}(X) = F_t^{i+1}(D_1 \vee \Delta D_1, D_2 \vee \Delta D_2, \dots, D_t \vee \Delta D_t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Phi_n^{a+t-1}(X) = F_t^t(D_1 \vee \Delta D_1, D_2 \vee \Delta D_2, \dots, D_t \vee \Delta D_t) \end{cases}$$

где $\Delta D_j = \overset{t-1}{\underset{i=1}{\vee}} \Delta d_j^i \quad (j = 1,2,\dots,t),$

(37) $$\overset{t}{\underset{j=1}{\vee}} \Delta d_j^i = \Phi_n^{a+i}(X) \& \overline{F}_t^{i+1}\left(D_1 \vee \left(\overset{i-1}{\underset{e=1}{\vee}} \Delta d_1^e\right), D_2 \vee \left(\overset{i-1}{\underset{e=1}{\vee}} \Delta d_2^e\right), \dots, D_t \vee \left(\overset{i-1}{\underset{e=1}{\vee}} \Delta d_t^e\right)\right).$$

Очевидно, что

$$\left(\overset{t-1}{\underset{i=1}{\vee}} \Delta F_i\right) \& \left(\overset{t}{\underset{i=1}{\vee}} \Delta D_i\right) = \left(\overset{t}{\underset{i=1}{\vee}} \Delta D_i\right)$$

и реализация на основе системы уравнений (36) не сложнее, чем на основе системы уравнений (32).

Результаты исследований показывают, что при r=2 для любых n могут быть сформированы $D_i, \Delta D_i$ такие, что в (36) $D_{t+1} = 0$,а

(38) $$\overset{t-1}{\underset{i=1}{\vee}} \Delta D_i = \left\{ \overset{t-1}{\underset{j=1}{\vee}} \left[g_{m_1}^{a+j}(X_1) \vee g_{m_2}^{a+j}(X_2) \right] \right\} \vee \left\{ \overset{t-1}{\underset{j=2-(a) \bmod 2}{\vee}} g_{m_1}^{b}(X_1) g_{m_{12}}^{b}(X_2) \right\},$$

где $b = [(a+j)/2]$.

Оптимальным является представление

(39) $$D_i \vee \Delta D_i = \bigvee_{j=j_{\min}}^{x} g_{m_1}^{b}(X_1) g_{m_{12}}^{b}(X_2)\left\{ g_{m_1}^{a-b}(X_1) \vee g_{m_2}^{a-b}(X_2)\right\} \vee \left(\Delta D_i^1 \vee \Delta D_i^2\right),$$

где $b = tj + i - 1, \quad x = \left[(a - 2i + 2)/2t\right]$,

$$J = a + t - i + 1, v = t\left[(a - 2i + 2)/2t\right] + t + i - 1,$$

$$j_{\min} = \begin{cases} \left[(a - m)/t\right] & \text{при} \quad m < a, \\ 0 & \text{при} \quad m \geq a, \end{cases}$$

(40) $$\Delta D_i^1 = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i = 1 \quad \text{или} \quad a + t - i + 1 > m, \\ g_{m_1}^{J}(X_1) \vee g_{m_2}^{J}(X_2) & \text{при} \quad i > 1 \quad \text{и} \quad a + t - i + 1 \leq m, \end{cases}$$

(41) $$\Delta D_i^2 = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad a + t \leq 2v, \\ g_{m_1}^{v}(X_1) g_{m_2}^{v}(X_2) & \text{при} \quad a + t > 2v, \end{cases}$$

причем $D_{t+1} = 0$. В этом случае система уравнений (36) имеет минимальную сложность реализации. При r=2 сложность схем, синтезированных на основе представлений (32) и (36), одинакова, однако последнее из них приводит к схемам меньшей глубины. При r>2 представление (36) обеспечивает получение более экономичных схем.

Следствие 2. Логическая схема формирования остатка количества единиц двоичного кода по модулю K в унитарном параллельном непозиционном коде, синтезированная методом вторичной факторизации ($r= t =2$) содержит:

(42) $$L(G(n)) = L(G(m_1)) + L(G(m_2)) + \Delta L_2,$$

элементов И, ИЛИ, НЕ, где m_1, m_2>K-1 или m_1=]n/2[,

(43) $$\Delta L_2 = \begin{cases} \left[(n^2 + 4)/8\right] + 3n/2 - 2 & \text{при} \quad n = 2]n/2[\quad \text{и} \quad n < K, \\ \left[(n^2 + 1)/8 + 7n/4\right] - 2 & \text{при} \quad n = 2]n/2[\quad \text{и} \quad n < K, \\ \left[(n^2 + 4)/8\right] + 5n/2 - 2 & \text{при} \quad n = 2]n/2[\quad \text{и} \quad K \leq n \leq 2K - 2, \\ \left[(n^2 + 1)/8 + 7n/4\right] + n - 2 & \text{при} \quad n = 2]n/2[\quad \text{и} \quad K \leq n \leq 2K - 2, \\ \left[((K - 1)^2 + 1)/2\right] + 5(K - 1) - 2 & \text{при} \quad n > 2K - 2. \end{cases}$$

Использование вторичной факторизации с параметром τ >2 позволяет в ряде случаев при $K \geq 7$ уменьшить сложность схемы по сравнению с определяемой оценкой (42) .
Следует отметить, что при $r>2$ получение представлений вида (36) возможно только путем перебора различных вариантов и проверки правильности реализации функций $\Phi_n^a(X)$.
На рис. 1 приведены графики зависимости сложности схем, синтезированных методом первичной факторизации (график 2) и вторичной факторизации при $r= t =2$ (график 3). На рис. 4 приведена схема устройства подсчета количества единиц 24-разрядного двоичного кода, синтезированная методом вторичной факторизации (r=3, τ=2,3) с использованием представления (36).

3.3. Однородные и регулярные структуры

В [15] исследованы однородные и регулярные структуры для реализации пороговых равновесных функций и , в частности, симметричные древовидные структуры, в которых реализация функций $F_n^a(X)$ осуществляется блоком, представляющим собой сумматор двух унитарных параллельных непозиционных кодов, по функциям разложения $F_{m_1}^{a_1}(X_1)$ и $F_{m_2}^{a_2}(X_2)$. Данный подход применим и для синтеза схем модульного контроля, которые могут быть выполнены в виде древовидной структуры, каждый из узлов которой при $n>K-1$ содержит сумматор двух унитарных параллельных непозиционных кодов и блок свертки результата суммирования по модулю К в соответствии с (6) или (13).
Блок суммирования может быть выполнен одним из трех способов.
В первом случае сумматор двух унитарных параллельных непозиционных кодов, формирующий систему функций $g_n^a(X)$, где $\{a\}=\{1,2,...,m\}$, содержит $(m^2+2m)/8$ ячеек И/ИЛИ ($m = \min\{2K-2, 2]n/2[\}$), соединенных пирамидально, причем

(44) $$x_1(i,j)=\begin{cases} g^i_{m_1}(X_1) & \text{при} \quad j=1; \quad i=1,\ldots,m/2, \\ z(i,j-1) & \text{при} \quad j=2,\ldots,m/2; \quad i=1,\ldots,m/2-j+1, \end{cases}$$

(45) $$x_2(i,j)=\begin{cases} g^i_{m_2}(X_2) & \text{при} \quad j=1; \quad i=1,\ldots,m/2, \\ y(i+1,j-1) & \text{при} \quad j=2,\ldots,m/2; \quad i=1,\ldots,m/2-j+1, \end{cases}$$

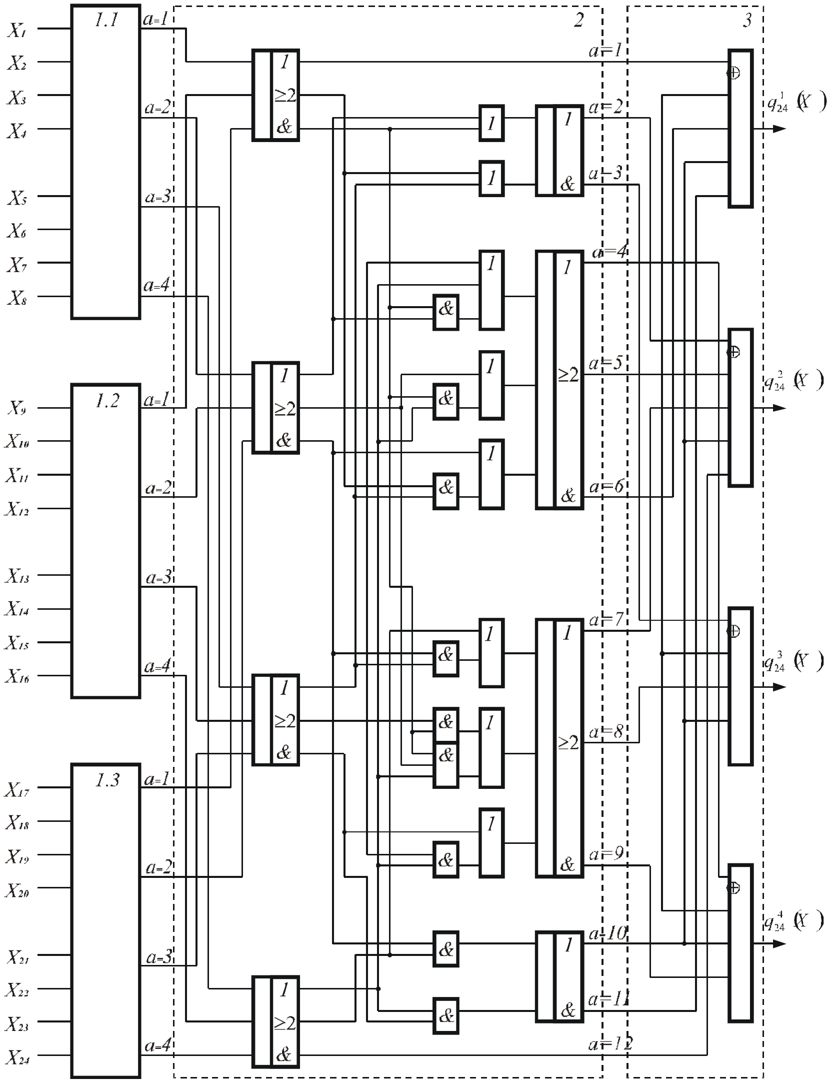

Рис.4. Схема подсчета количества единиц 24-разрядного двоичного кода по модулю K=5 в унитарном непозиционном коде, синтезированная методом вторичной факторизации (r=3, τ=2,3)

где $x_1(i,j)$ и $x_1(i,j)$ сигналы на входах i-й ячейки j-го столбца, а $z(i,j)$ и $y(i,j)$ - сигналы на ее выходах ИЛИ и И соответственно, причем функции $\Phi_n^a(X)$ реализуются на следующих выходах блока

$$\Phi_n^a(X) = \begin{cases} y(1,a) & \text{при } a = 1,2,\ldots,]m/2[, \\ z(a-]m/2[, m-a+1) & \text{при } a =]m/2[+1,\ldots,m. \end{cases} \tag{46}$$

Синтезируемая таким способом схема устройства подсчета количества единиц параллельного двоичного кода по модулю K=5 приведена на рис. 5.

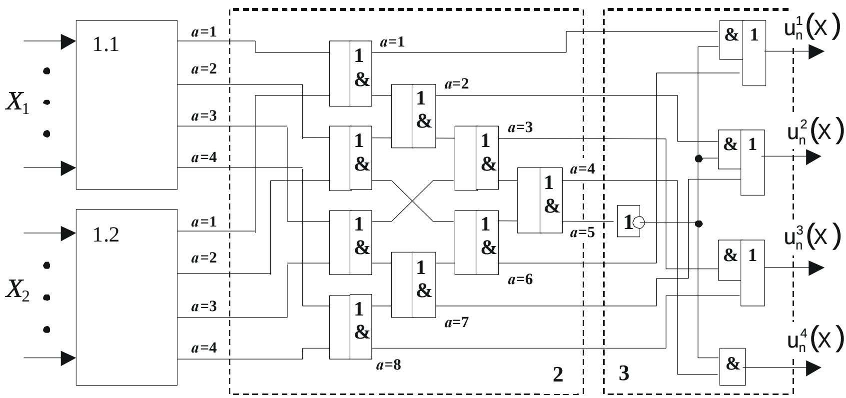

Рис. 5. Устройство подсчета количества единиц двоичного n-разрядного кода по модулю K=5, выполненное в виде композиции однородных структур, синтезированных методом симметричной факторизации

Сумматор унитарных параллельных непозиционных кодов для нечетного n<2K-2 получается из сумматора на (n+1) вход путем исключения последней (n+1)/2-й ячейки первого столбца.

Сложность синтезированной таким способом схемы определяется следующей оценкой, получаемой из (28) с учетом сложности блока суммирования.

Следствие 3. Логическая схема формирования остатка количества единиц двоичного кода по модулю K в унитарном параллельном непозиционном коде, выполненная в виде композиции пирамидальных структур из однотипных ячеек И/ИЛИ содержит:

$$L(G(n)) = L(G(m_1)) + L(G(m_2)) + \Delta L_3 \tag{47}$$

элементов И, ИЛИ, НЕ, где где m_1, m_2>K-1 или m_1=]n/2[,

$$(48)\quad \Delta L_3 = \begin{cases} \left[\left(n^2+2n\right)/4\right] & \text{при} \quad n = 2]n/2[\quad \text{и} \quad n < K, \\ \left[\left(n^2+4n-5\right)/4\right] & \text{при} \quad n \neq 2]n/2[\quad \text{и} \quad n < K, \\ \left[\left(n^2+2n\right)/4\right]+n & \text{при} \quad n = 2]n/2[\quad \text{и}, \ K \le n \le 2K-2, \\ \left[\left(n^2+4n-5\right)/4\right]+n & \text{при} \quad n \neq 2]n/2[\quad \text{и} \quad K \le n \le 2K-2, \\ (K-1)^2+3(K-1) & \text{при} \quad n > 2k-2.. \end{cases}$$

Из полученной оценки видно, что сложность схем, выполненных в виде композиции пирамидальных структур из однотипных ячеек И/ИЛИ, равна сложности схем, синтезированных методом первичной факторизации.

Более быстродействующие и экономичные однородные симметричные структуры сумматоров унитарных параллельных непозиционных кодов могут быть синтезированы с использованием метода симметричной факторизации систем пороговых равновесных функций, предложенного в [15]. Получаемые при его использовании схемы также представляют собой пирамидальную структуру из однотипных ячеек И/ИЛИ, однако число ячеек уменьшено за счет реконфигурации связей внутри пирамидальной структуры. Получение аналитических оценок сложности и быстродействия для схем, синтезированных методом симметричной факторизации не представляется возможным. Для фундаментальных симметричных многополюсников, реализующих систему всех пороговых равновесных функций n переменных, при $n \le 32$ соответствующие оценки получены [15] путем экспериментального проектирования и последующего анализа разработанных технических решений. Они позволяют получить оценки сложности устройств модульного контроля при $K \le 16$. Как показали результаты оптимизации схем, синтезируемых методом симметричной факторизации, выполненной путем перебора на ЦВМ всех возможных значений m_i для K=5,7, их минимальная сложность равна сложности схем, синтезируемых методом вторичной факторизации, определяемой оценкой (42).

Синтезируемая с использованием метода симметричной факторизации схема устройства подсчета количества единиц параллельного двоичного кода по модулю K=5 приведена на рис. 5.

Дальнейшее повышение быстродействия и уменьшение сложности схем модульного контроля, выполняемых в виде композиции пирамидальных структур может быть достигнуто [15] при использовании сумматора унитарных параллельных непозиционных кодов, реализуемого в виде композиции двух блоков суммирования унитарных параллельных непозиционных кодов на m_1 и $m_2 = n - m_1$ входов и группы ячеек И/ИЛИ, формирующих выходные сигналы. Входы первого и второго блоков суммирования соединяются с входами первого $A_1 = \{a_1^1, a_2^1, ..., a_{]m/2[}^1\}$ и второго $A_2 = \{a_1^2, a_2^2, ..., a_{[m/2]}^2\}$ слагаемых сумматора унитарных параллельных непозиционных кодов в следующем порядке

(49) $$b_i^1 = a_{2i-1}^1 \text{ при } i = 1,...,]m_1/2[,$$

(50) $$b_i^2 = a_{2i-1}^2 \text{ при } i = 1,...,[m_1/2],$$

(51) $$d_i^1 = a_{2i}^1 \text{ при } i = 1,...,]m_2/2[,$$

(52) $$d_i^2 = a_{2i}^2 \text{ при } i = 1,...,[m_2/2],$$

где $a_i^1 = g_{n_1}^i(X_1)$, $a_i^2 = g_{n_2}^i(X_2)$,

$B_1 = \{b_1^1, b_2^1, ..., b_{]m_1/2[}^1\}$ и $B_2 = \{b_1^2, b_2^2, ..., b_{[m_1/2]}^2\}$ - входы первого и второго слагаемых первого блока суммирования;

$D_1 = \{d_1^1, d_2^1, ..., d_{]m_2/2[}^1\}$ и $D_2 = \{d_1^2, d_2^2, ..., d_{[m_2/2]}^2\}$ входы первого и второго слагаемых второго блока суммирования.

Порядок соединения выходов блоков суммирования со входами выходных ячеек И/ИЛИ $D_1 = \{d_1^1, d_2^1, ..., d_{]m_2/2[}^1\}$ определяется следующими соотношениями

(53) $$x_1(i) = p_{i+1},$$

(54) $$x_2(i) = q_i,$$

где i=1,2,...,m/2-1, $x_1(i)$ и $x_2(i)$ - первый и второй входы i-й ячейки И/ИЛИ, а p_j и q_j - j-е выходы первого и второго блоков суммирования.

На выходах ячеек И/ИЛИ реализуется система функций $\Phi_n^i(X)$, причем

(55) $$\Phi_n^i(X)=\begin{cases} p_1 & \text{при } i=1, \\ y_{[i/2]} & \text{при } i=2,4,\ldots,m-2, \\ z_{[i/2]} & \text{при } i=3,5,\ldots,m-1, \\ q_{m/2} & \text{при } i=m, \end{cases}$$

где y_i и z_i - выходы i-й ячейки И/ИЛИ.

Каждый из блоков суммирования унитарных параллельных непозиционных кодов, вплоть до блоков на два входа, представляющих собой ячейку И/ИЛИ, выполняется аналогичным образом.

Сложность таких схем определяется соотношением

(56) $$L(G(n)) = L(G(m_1)) + L(G(m_2)) + l(s(m)),$$

где $m=m_1+m_2$, $m_i=\min\{m_i, K-1\}$

(57) $$l(s(m)) = l(s(m_1)) + l(s(m_2)) + 2]\!(m-2)/2[\,,$$

$l(s(m_i))$- сложность сумматора унитарных параллельных непозиционных кодов на m_i входов.

Последняя из рассмотренных однородных древовидных симметричных структур обладает наибольшим быстродействием и наименьшей сложностью, однако, регулярность связей между ячейками практически отсутствует.

4. Методы синтеза логических схем формирования остатка двоичного кода по модулю К в унитарном параллельном непозиционном коде

Из введенного выше понятия унитарного параллельного непозиционного кода $U(X)$ остатка по модулю K двоичного кода $X=\{x_1, x_2,\ldots, x_n\}$ следует, что он обладает свойствами, аналогичными свойствам кода $G(X)$.

С учетом этого легко доказывается справедливость (по аналогии с приведенными в разделе 3.1 доказательствами) следующего представления

$$u_n^a(X)=\bigvee_{j=0}^{i'}\left(\left\{\bigvee_{\{A_r^j\}} u_{m_1}^{a_1}(X_1)\,u_{m_2}^{a_2}(X_2)\ldots u_{m_r}^{a_r}(X_r)\right\}\&\overline{\left\{\bigvee_{\{B_r^j\}} u_{m_1}^{b_1}(X_1)\,u_{m_2}^{b_2}(X_2)\ldots u_{m_r}^{b_r}(X_r)\right\}}\right)=$$

$$\bigvee_{j=0}^{l'}\Phi_n^{a+jK}(X)\,\&\,\overline{\Phi_n^{(j+1)K}(X)}=\bigoplus_{j=0}^{l'}\left(\Phi_n^{a+jK}(X)\oplus\Phi_n^{(j+1)K}(X)\right), \tag{58}$$

являющегося результатом декомпозиции с параметром r. Т.е. рассмотренный выше метод декомпозиции может быть использован для синтеза схем формирования остатка параллельного двоичного кода по модулю K без существенных изменений.

Используя свойства функций $u_n^a(X)$ из (58) получаем представления, являющиеся результатом первичной и вторичной факторизации, полностью аналогичные (26) или (32) и (36). Для синтеза схем формирования остатка двоичного кода по модулю К могут также быть использованы однородные и регулярные структуры, описанные выше.

Рассмотренные методы синтеза могут использоваться при произвольном порядке декомпозиции. Под порядком декомпозиции понимается порядок выбора значений параметра разложения r и мощности подмножеств X_1, X_2,..., X_n на каждом шаге декомпозиции. Однако, в данном случае сложность синтезируемой схемы зависит не только от выбора мощности подмножеств, но и от значений весов w_j переменных $x_j\in X_i$. Оптимальным является порядок декомпозиции, при котором минимизируется мощность множества функций разложения $u_{m_i}^{a_i}(X_i)$ на всех шагах декомпозиции. Очевидно, что это достигается, когда в процессе декомпозиции при мощности подмножеств $s(X_i)<K$ для всех $x_j\in X_i$ имеем $(w_j)\mathrm{mod}K=\mathrm{const}$. В этом случае сложность схемы формирования остатка параллельного двоичного кода по модулю K, синтезируемой методами декомпозиции и факторизации, а также выполняемых в виде композиции однородных структур, незначительно отличается от определяемой оценками (15), (29), (42), (47), (56).

В целом процесс синтеза схемы формирования остатка двоичного кода по модулю K отличается от процесса синтеза схемы подсчета количества единиц по модулю K только на этапе, когда перестают совпадать мощности множеств значений индексов функций разложения, т.е. на конечных циклах процесса синтеза. Различия в процессе синтеза и сложности синтезируемых схем можно минимизировать, если в случае, когда для всех $x_j \in X_i$ имеем $(w_j)\mathrm{mod}K=\mathrm{const}$, формировать систему функций $u_{m_i}^{a_i}(X_i)$ на основе системы функций $g_{m_i}^{a_i}(X_i)$ в соответствии с представлением

(59) $$u_{m_i}^{a_i}(X_i)=\bigvee_{j=a_i}^{K-1} g_{m_i}^{j}(X_i)=g_{m_i}^{a_i}(X_i)\vee u_{m_i}^{a_i+1}(X_i),$$

где

(60) $$g_{m_i}^{j}(X_i)=\begin{cases} g_{m_i}^{b}(X_i) & \text{\textit{при}}\ j=(bw)\mathrm{mod}K\ \text{\textit{и}}\ [bw/K]\geq[w(K-1)/K], \\ g_{m_i}^{b}(X_i)\overline{g_{m_i}^{d}(X_i)} & \text{\textit{при}}\ j=(bw)\mathrm{mod}K\ \text{\textit{и}}\ [bw/K]<[w(K-1)/K], \end{cases}$$

или

(61) $$g_{m_i}^{j}(X_i)=\bigvee_{\{B\}_j} \Phi_{m_i}^{b}(X_i)\overline{\Phi_{m_i}^{d}(X_i)},$$

$\{B_j\}$ - множество индексов функций разложения $\Phi_{m_i}^{b}(X_i)$, удовлетворяющих условию $j=(bw)modK$, а $d=]([bw/K]+1)K/w[$. Поскольку сложность схем, синтезируемых рассмотренным методом, зависит от порядка декомпозиции, получить оценку сложности в общем виде не представляется возможным. Однако в том случае, когда выполняется указанное выше условие, сложность схемы составляет

(62) $$L\,(U(n)) = L(G(n))+\Delta L$$

где ΔL - количество логических элементов, необходимых для реализации преобразования (59) или (61), которое может быть оценено следующим образом

(63) $$\Delta L \approx \begin{cases} 3 & \text{при}\ K=3, \\ 23 & \text{при}\ K=5, \\ 22 & \text{при}\ K=7. \end{cases}$$

5. Быстродействие логических схем модульного контроля в унитарных параллельных позиционных кодах

Важным параметром логических схем, кроме их сложности является также быстродействие. Как правило, его определяют глубиной схемы, т.е. максимальным числом последовательно соединенных логических элементов от входа схемы к ее выходу. Используем данный критерий для оценки быстродействия логических схем модульного контроля, синтезируемых рассмотренными выше методами.

Схемы максимальной глубины получаются в частном случае декомпозиции, представляющем собой разложение по переменным. Их глубина зависит от числа переменных n и параметра разложения r и для классического базиса И, ИЛИ, НЕ определяется следующей оценкой

(64) $$H(G(n)) = \begin{cases} 3n - K - 2 & при \;\; r = 2, \\ H(F(n - t(r-1))) + \Delta ht - \Delta H & при \;\; r > 2, \end{cases}$$

где $\Delta h = 5$, $t =](n-K+1)/(r-1)[$, а

$$\Delta H = \begin{cases} 2 & при \;\; n - t(r-1) = K - r + 1, \\ 0 & при \;\; n - t(r-1) \neq K - r + 1, \end{cases}$$

$$H(F(n)) = \begin{cases} 2(n-1) - 1 & при \;\; r = 2, \\ 2k & при \;\; n = (r-1)k + 1 \; и \;\; r > 2, \\ 2k + 1 & при \;\; n = (r-1)k + 2 \; и \;\; r > 2, \\ 2k + 2 & при \;\; (r-1)k + r - 1 \geq n > (r-1)k + 2 \; и \;\; r > 3. \end{cases}$$

Схемы минимальной глубины получаются при регулярной детерминированной декомпозиции. Из уравнения (6) следует, что каждый шаг декомпозиции увеличивает глубину схема на Δh_1 элементов, при этом глубина синтезируемых схем определяется следующим рекуррентным соотношением

(65) $$H(G(n)) = H(G(]n/r[)) + \Delta h_1 < \Delta h_1 \log_r n \;, \text{ где } n > K.$$

В классическом базисе Δh_1=5, так как для реализация функции $g_n^a(X)$ или $u_n^a(X)$ по их функциям разложения $g_{m_i}^{a_i}(X_i)$ и $u_{m_i}^{a_i}(X_i)$ требуется структура типа И-ИЛИ, имеющая глубину 2, и схема свертки сформированных функций $\Phi_{m_i}^{a_i}(X_i)$ и $\Phi_{m_i}^{a_i}(X_i)$ по модулю К, также имеющая глубину 3. При использовании базиса, включающего операцию суммирования по модулю два Δh_1=3.

При синтезе методом первичной факторизации на основе представлений (26) глубина схем возрастает, по сравнению с синтезированными методом декомпозиции. Это обусловлено необходимостью реализации системы пороговых равновесных функций $F_r^{a_i}(Y_i)$. Глубина синтезируемой схемы при *r*=2, 3 определяется следующим рекуррентным соотношением

(66) $$H(G(n)) = H(G(]n/r[)) + r + \Delta h_1 - 1 < (r + \Delta h_1 - 1)\log_r n \; .$$

Использование вторичной факторизации на основе представления (36) (*r*=*t*=2) приводит к схемам глубины

(67) $$H(G(n)) = H(G(]n/2[)) + \Delta h_1 + 2 < 7\log_2 n \; .$$

Реализация в виде композиции пирамидальных структур приводит к схемам глубины

(68) $$H(G(n)) = H(G(]n/2[)) + K + 2 \; , \quad \text{где } n \geq 2K\text{-}2 \; .$$

В случае симметричной факторизации

(69) $$H(G(n)) = H(G(]n/2[)) + K + 2 - \Delta H \; ,$$

где $n \geq 2K$-2, а $\Delta H \approx](K-5)/4[$.
Глубина схем формирования остатка двоичного кода по модулю К в унитарном параллельном непозиционном коде, синтезированных рассмотренными методами при $n \geq 2K$-2 определяется оценками (59)-(62). При $n<2K$-2 их глубина, в зависимости от порядка декомпозиции, может превышать определяемую указанными оценками на величину $\Delta h_2 \leq 3$.
Приведенные оценки показывают, что схемы модульного контроля в унитарных параллельных непозиционных кодах имеют на 20-25% меньшую сложность, но в 1,5- 2 раза большую глубину, чем схемы модульного контроля в унитарных параллельных позиционных кодах [6]. Увеличение параметра разложения *r* приводит к уменьшению глубины схем, однако, при этом быстро возрастает их сложность.

6. Заключение

В статье исследованы вопросы синтеза логических схем модульного контроля в унитарных параллельных непозиционных кодах, предложены декомпозиционный метод синтеза и методы факторизации. Получены оценки сложности и быстродействия синтезируемых рассмотренными методами схем. Они показывают, что синтезируемые схемы имеют меньшую сложность и меньшее быстродействие, по сравнению со схемами модульного контроля в унитарных параллельных позиционных кодах. Характеристики синтезируемых схем существенно зависят от выбора значения параметра разложения *r*. Его увеличение приводит к повышению быстродействия синтезируемой схемы, но увеличивает ее сложность.

Полученные оценки сложности и быстродействия логических схем модульного контроля в унитарных параллельных непозиционных кодах показывают, что их использование целесообразно при высоких требованиях к быстродействию схемы и , в основном, при малых значениях модуля К. Приведенные в данной статье результаты формируют достаточно полный теоретический подход к проблеме синтеза логических схем модульного контроля в унитарных параллельных непозиционных кодах, позволяют определить области их возможного использования, а также точно оценить на ранних стадиях проектирования параметры синтезируемых схем и решить вопрос о целесообразности их использования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Журавлев Ю.П., Кателюк Л.А., Циклинский Н.И.* Надежность и контроль ЭВМ. М.: Радио и связь, 1978.
2. *Долгов А.И.* Диагностика устройств, функционирующих в системе остаточных классов. М.: Сов. Радио, 1982.
3. *Селлерс Ф.* Методы обнаружения ошибок в работе ЭЦВМ. М.: Мир, 1972.
4. *Дадаев Ю.Г.* Теория арифметических кодов. М.: Радио и связь, 1981.
5. *Касами Т., Токура Н., Ивадари Ё., Инагаки Я.* Теория кодирования. М.: Мир, 1978.
6. *Музыченко О.Н.* Синтез логических схем модульного контроля в унитарных позиционных двоичных кодах. // Автоматика и телемеханика. 2001. № 3. С. 158 - 173.
7. *Фридман А., Менон П.* Теория и проектирование переключательных схем. М.: Мир, 1978.
8. *Поляков В.Е., Проскурин Г.М., Федотов В.П., Шарнин Ю.К.* Преобразование симметричных булевых функций.// Материалы семинара по кибернетике. Кишенев, 1972. Вып. 47. С. 16-30.

9. *Дертоузос М.* Пороговая логика. М.: Мир, 1967.
10. *Вавилов Е.Н., Егоров Б.М., Ланцев В.С., Тоценко В.Г.* Синтез схем на пороговых элементах. М.: Сов. Радио, 1970.
11. *Музыченко О.Н., Лукоянов В.П.* Быстродействующий алгоритм синтеза схем симметричных функций алгебры логики для систем автоматизированного проектирования. // Вопросы радиоэлектроники. Сер. Общие вопросы радиоэлектроники. 1984. Вып.12. С. 120-128.
12. *Музыченко О.Н.* Факторизационный метод синтеза пороговых схем. // Автоматика и телемеханика. 1986. № 8. С. 166-170.
13. *Музыченко О.Н.* Факторизация систем пороговых равновесных функций. // Кибернетика. 1989. № 4. С. 124-127.
14. *Музыченко О.Н.* Устройство для контроля параллельного двоичного кода по модулю К. А.с. 1361557 СССР// Б. И. 1987. № 47.
15. *Музыченко О.Н.* Однородные и регулярные структуры для реализации симметричных функций алгебры логики// Автоматика и телемеханика. 1998. № 4. С. 152-164.
16. *Пихтова Л.Д.* К факторизационному методу синтеза комбинационных схем.// Вычислительная техника в машиностроении. Минск: Ин-т техн. кибернетики АН БССР. 1973. С. 122-128.
17. *Маркаускас Р.К.* Алгоритм факторизации булевых функций. В кн.: Вычислительная техника. Каунас: Каунасский политехн. ин-т, 1972, с. 122-128.
18. *Музыченко О.Н.* Устройство для контроля параллельного двоичного кода по модулю К. А.с. 1425676 СССР// Б. И. 1988. № 35.