

3.1. Организация обнаружения и исправления ошибок в ЭВМ в непозиционных системах

И.Я. Акушский, Д.И. Юдицкий

Для позиционных систем счисления (двоичной, троичной, десятичной и т. д.) в настоящее время развит довольно богатый арсенал методов обнаружения и исправления ошибок при передаче информации. Основной идеей, проходящей через все методы, является введение избыточной информации, представленной в виде какой-то обобщенной характеристики всего числа, которая берется по одному или нескольким модулям.

Иначе говоря, позиционное число сопровождается некоторой дополнительной интегральной характеристикой, носящей ярко выраженный непозиционный характер и специально организованной с целью обнаружения и исправления ошибок, которые могут возникнуть при хранении и транспортировке числа.

Поскольку представление самого числа принято позиционным, а избыточная информация носит непозиционный характер, естественно заметное усложнение дополнительной аппаратуры при попытке контролировать правильность выполнения операций в арифметическом устройстве и гигантская сложность аппаратуры исправления обнаруженной ошибки.

Несколько иначе дело обстоит в непозиционных системах счисления, в частности в системе остаточных классов. В основе таких систем лежит некоторая совокупность взаимно простых чисел, называемых основаниями системы. Обозначим их через $p_1, p_2, \dots, p_n$. Число A представляется в виде остатков по этим основаниям, а именно

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

где

$$\alpha_i \equiv A \pmod{p_i}$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Здесь цифры $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ в силу самого представления числа являются независимыми друг от друга величинами, благодаря чему ряд арифметических операций (сложение, вычитание, умножение, формальное деление и т. д.) могут выполняться поразрядно, т. е. без учета связи между цифрами числа. Диапазон представления чисел в такой системе определяется как

$$\mathcal{P} = \prod_{i=1}^n p_i.$$

Введем теперь избыточность в представление числа в виде дополнительного основания p_{n+1} , взаимно простого с остальными основаниями систем. Числовой диапазон теперь определится как

$$P = \prod_{i=1}^{n+1} p_i = p_{n+1} \mathcal{P},$$

т. е. введенная избыточность увеличивает числовой диапазон в p_{n+1} раз.

Число A теперь представится в виде остатков по всем основаниям системы в виде

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}),$$

причем благодаря принятому представлению числа все его цифры, включая и α_{n+1} , являются независимыми. А это означает, что цифра α_{n+1} числа по дополнительному основанию p_{n+1} , называемому в дальнейшем контрольным, будет участвовать в выполнении арифметических операций равноправно с остальными цифрами числа. Иначе говоря, если благодаря дополнительному основанию удастся контролировать появление ошибки, то этот контроль будет действенным и при анализе результата арифметической операции без дополнительных аппаратных или программных действий.

Рассмотрим теперь один из возможных методов проверки числа на правильность (при наличии контрольного основания). Прежде всего введем следующее соглашение. Будем исходить из того, что при выполнении вычислительной машиной заданной программы все операнды и результаты любых арифметических операций являются правильными числами, т. е. числами, лежащими в диапазоне $(0, \mathcal{P})$ — в первоначально определенном числовом диапазоне.

Кроме того, отметим, что в числовой последовательности

$$A_s = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, s);$$

$$s = 0, 1, 2, \dots, p_{n+1} - 1$$

только одно число A_s^0 при одном значении $s = s^*$ расположено в диапазоне $(0, \mathcal{P})$, т. е. является правильным:

$$A_s^0 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, s^*).$$

Любое другое значение $s \neq s^*$ переводит число из диапазона $(0, \mathcal{P})$ в диапазон $(\mathcal{P}, P)$. Рассмотренный факт справедлив и для любой цифры α_i по основанию p_i .

Это означает, что при учете принятого соглашения арифметическое устройство оперирует только с правильными числами вида A_s^0 и любая ошибка по любому основанию превращает его в неправильное число.

Здесь под словом ошибка или одиночная ошибка мы понимаем искажение любой одной цифры числа по любому основанию. Ве-

личина искажения или длительность его воздействия роли не играют, т. е. под словом ошибка понимается как случайный сбой в цифре, так и полный отказ машинного тракта, работающего по данному основанию.

Таким образом, контроль на наличие ошибки сводится к определению правильности отдельного оператора или результата арифметической операции.

В качестве одного из возможных методов контроля может быть предложен так называемый метод нулевизации числа. Суть этого метода заключается в следующем. Пусть нам дано число вида

$$B = (0, 0, \dots, 0, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}),$$

имеющее нулевыми первые $i - 1$ цифры.

Выберем наименьшее возможное число вида

$$M_i = (0, 0, \dots, 0, \alpha_i, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n, \beta_{n+1}).$$

Очевидно, что число M_i есть одно из чисел последовательности

$$0, \gamma, 2\gamma, \dots, (p_i - 1)\gamma,$$

где

$$\gamma = \prod_{j=1}^{i-1} p_j,$$

Найдем разность чисел B и M_i :

$$C = B - M_i = (0, 0, \dots, 0, c_{i+1}, \dots, c_{n+1}).$$

Как видим, у полученной разности уже i первых цифр являются нулевыми. Мы провели один шаг нулевизации, в результате которого еще одна цифра числа стала нулевой. Вернемся теперь к исходному числу

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1})$$

и проведем n шагов нулевизации, начиная с цифры α_1 и кончая цифрой α_n .

Тогда в результате получим число вида

$$D = (0, 0, \dots, 0, d_{n+1}),$$

имеющее нулевыми первые n цифр.

Рассмотрим теперь, какова величина наибольшей возможной суммы $\sum_{i=1}^n M_i$, вычитаемой из числа A :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n M_i \right)_{\max} &= (p_1 - 1) + (p_2 - 1)p_1 + \dots \\ &\dots + (p_i - 1) \prod_{j=1}^{i-1} p_j + \dots + (p_n - 1) \frac{\mathcal{P}}{p_n} = \mathcal{P} - 1. \end{aligned}$$

Т. е. даже в экстремальном случае общая сумма вычитаемых чисел менее величины диапазона $\mathcal{P}$. Иначе говоря, процесс нулевизации сводится к следующему. Если весь диапазон $(0, P)$ разбить на p_{n+1} интервалов, и неправильное число расположено в интервале

$$(j\mathcal{P}, (j+1)\mathcal{P}),$$

то в результате каждого шага нулевизации мы, не выходя из интервала с номером $j+1$, преобразуем исходное число в число, расположенное ближе к левому краю рассматриваемого интервала. В результате же всего процесса нулевизации мы получаем число, лежащее на левом краю интервала.

Таким образом, процесс нулевизации сводится к определению номера интервала, в котором расположено число.

Действительно, рассмотрим число D

$$D = (0, 0, \dots, 0, d_{n+1}) = (d_{n+1}m_{n+1}) \pmod{p_{n+1}} \mathcal{P},$$

где m_{n+1} — константа системы оснований, и, учитывая, что число D лежит в том же интервале $(j\mathcal{P}, (j+1)\mathcal{P})$, что и исходное число A , получаем:

$$j = (d_{n+1}m_{n+1}) \pmod{p_{n+1}}.$$

Выбирая систему оснований таким образом, чтобы выполнялось условие $m_{n+1}=1$, мы несколько упростим полученное выражение:

$$j = d_{n+1}.$$

Т. е. цифра d_{n+1} , полученная как результат нулевизации числа, определяет однозначно номер интервала, в котором было расположено исходное число.

Учитывая соглашение о правильности операндов и результатов арифметических операций, мы утверждаем следующее.

Если исходное число правильное, то результатом нулевизации может быть только нулевое число, т. е.

$$d_{n+1} = 0.$$

Если исходное число было неправильным, то результат нулевизации отличен от нуля и

$$d_{n+1} \neq 0.$$

Таким образом, метод нулевизации является методом контроля числа на наличие одиночной ошибки в любой цифре числа. Здесь подчеркивается слово любой, так как имеется в виду и цифра контрольного основания (учитывая равноправность введения этой цифры по отношению к другим цифрам числа).

Перейдем теперь к исследованию возможности исправления числа, если произошла какая-то ошибка $\Delta \alpha_i$ по основанию p_i . При этом число A исказится и будет иметь вид

$$\bar{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \bar{\alpha}_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{n+1}),$$

где

$$\tilde{\alpha}_i = \alpha_i + \Delta\alpha_i; \quad \Delta\alpha_i = 1, 2, \dots, p_i - 1,$$

вместо вида

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{n+1}).$$

Проведем процесс нулевизации по всем цифрам чисел $\tilde{A}$ и A , за исключением цифры по основанию p_i :

$$\tilde{D}_1 = (0, 0, \dots, 0, \tilde{\beta}_i, 0, \dots, \beta_{n+1});$$

$$D_1 = (0, 0, \dots, 0, \beta_i, 0, \dots, \beta_{n+1}).$$

Поскольку нулевизация проводится вычитаниями, величина ошибки измениться не может и справедливо соотношение

$$\tilde{\beta}_i = \beta_i + \Delta\alpha_i.$$

Завершение процесса нулевизации должно производиться константами вида

$$\frac{\mathcal{P}}{p_i}; \quad 2 \frac{\mathcal{P}}{p_i}; \quad \dots; \quad (p_i - 1) \frac{\mathcal{P}}{p_i},$$

где

$$\frac{\mathcal{P}}{p_i} = (0, 0, \dots, 0, c_i, 0, \dots, c_{n+1}).$$

Выберем пару λ_i и λ'_i — таких целых неотрицательных чисел, чтобы выполнялось условие

$$\tilde{\beta}_i = \lambda'_i c_i \pmod{p_i};$$

$$\beta_i = \lambda_i c_i \pmod{p_i}.$$

Умножая числа λ'_i, λ_i на $\frac{\mathcal{P}}{p_i}$ и вычитая соответственно из $\tilde{D}_1$ и D_1 , получим:

$$\beta_{n+1} - \lambda'_i c_{n+1} = d_{n+1} \pmod{p_{n+1}};$$

$$\beta_{n+1} - \lambda_i c_{n+1} = 0 \pmod{p_{n+1}},$$

откуда

$$\lambda'_i - \lambda_i = \frac{p_{n+1} - d_{n+1}}{c_{n+1}} \pmod{p_{n+1}}.$$

Здесь деление рассматривается как поразрядное деление по модулю p_{n+1} . Из правила введения значений λ_i и λ'_i получим

$$(\lambda'_i - \lambda_i) c_i = (\tilde{\beta}_i - \beta_i) \pmod{p_i} = \Delta\alpha_i \pmod{p_i}.$$

Теперь значение $\Delta\alpha_i$ может быть однозначно определено по формуле

$$\Delta\alpha_i = \left(\frac{p_{n+1} - d_{n+1}}{c_{n+1}} \right) \pmod{p_{n+1}} c_i \pmod{p_i}.$$

Таким образом, в нашем случае, если известно местоположение ошибки, то значение результата нулевизации исходного числа d_{n+1} однозначно определяет, на какую величину $\Delta\alpha_i$ должна быть скорректирована испорченная цифра.

Несколько сложнее дело обстоит в случае, когда нам неизвестно месторасположение ошибки, т. е. неизвестно, по какому основанию она возникла. Тогда приходится решать обратную задачу, а именно мы должны рассматривать все возможные ошибки по всем возможным основаниям и решать вопрос, может ли данная ошибка по данному основанию привести к тому, что неправильное число, полученное в результате возникновения ошибки, попадет в интервал с номером $j+1$. Неправильное число $\tilde{A}$ и правильное A связаны равенством

$$\tilde{A} - A = (0, 0, \dots, 0, \Delta\alpha_i, 0, \dots, 0),$$

т. е. номер интервала, куда попадает неправильное число, определяется как

$$j - \delta = \left[\frac{\frac{\Delta\alpha_i m_i \frac{p}{p_i}}{\frac{p}{p_{n+1}}}}{\frac{p}{p_{n+1}}} \right] = \left[\frac{\Delta\alpha_i m_i p_{n+1}}{p_i} \right] (\text{mod } p_{n+1}).$$

Здесь квадратные скобки обозначают целую часть заключенного в них выражения. Член δ , который может принимать значение 0 или 1, указывает на некоторую неоднозначность номера интервала в силу зависимости местоположения неправильного числа от величины исходного числа.

Таким образом, номер интервала и величина предполагаемой ошибки связаны соотношением:

$$j = \left[\frac{\Delta\alpha_i m_i p_{n+1}}{p_i} \right] (\text{mod } p_{n+1}) + \delta.$$

Теперь у нас появилась возможность перебирать все возможные значения ошибок по каждому из оснований и выделять из них те, наличие которых могло бы превратить исходное правильное число в неправильное, расположенное в диапазоне

$$(j\mathcal{P}, (j+1)\mathcal{P}),$$

и составить таблицу соответствия номеру интервала, или, проще, величине результата нулевизации значений величин возможных ошибок по разным основаниям. Тогда при выявлении значения d_{n+1} мы из такой таблицы можем выбрать соответствующую альтернативную совокупность возможных ошибок.

В общем виде доказано, что при наличии двух контрольных оснований p_{n+1} и p_{n+2} подобная альтернативная совокупность стягивается до одного возможного значения ошибки лишь по одному возможному основанию, т. е. обеспечивается взаимно

однозначное соответствие величин d_{n+1} и $\Delta \alpha_i$. Но наличие двух контрольных оснований, естественно, требует большего количества аппаратуры, чем у одного основания, и значительно интереснее попытаться решить задачу при только одном контрольном основании. Оказывается, что, привлекая на базе принятого соглашения динамику процесса, мы в состоянии существенно сузить величину альтернативной совокупности и в пределе однозначно решить поставленную задачу. А именно, если в результате какой-либо операции получен набор оснований

$$\mathcal{A}_1 = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{ik}),$$

по которым могла бы возникнуть ошибка, переводящая результат в данный интервал с номером j , то, предполагая, что в процессе вычислений ошибка не может переместиться в другое основание (цифры числа между собой никак не связаны), мы, получая другую совокупность оснований:

$$\mathcal{A}_2 = (p_{j1}, p_{j2}, \dots, p_{jm}),$$

утверждаем, что ошибка может существовать только в пересечении областей $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$.

Моделирование некоторых задач показывает, что полное стягивание обеспечивается в результате выполнения в среднем трех операций. Ускорение стягивания обеспечивается при учете кроме месторасположения ошибки и ее величины.

Проиллюстрируем сказанное примером. Возьмем систему оснований

$$p_1 = 2; p_2 = 3; p_3 = 5; p_4 = 7; p_5 = 11.$$

Здесь основание $p_5 = 11$ является контрольным. Рабочий диапазон такой системы

$$\mathcal{P} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210,$$

а полный диапазон

$$p = 11\mathcal{P} = 2310.$$

Минимальные числа нулевизации определяются следующим образом:

$$M_1^{(1)} = (1, 1, 1, 1, 1);$$

$$M_2^{(1)} = (0, 1, 4, 4, 4);$$

$$M_2^{(2)} = (0, 2, 2, 2, 2);$$

$$M_3^{(1)} = (0, 0, 1, 6, 6);$$

$$M_3^{(2)} = (0, 0, 2, 5, 1);$$

$$M_3^{(3)} = (0, 0, 3, 4, 7);$$

$$M_3^{(4)} = (0, 0, 4, 3, 2);$$

$$M_4^{(1)} = (0, 0, 1, 1, 0);$$

$$M_4^{(2)} = (0, 0, 0, 2, 8);$$

$$M_4^{(3)} = (0, 0, 0, 3, 7);$$

$$M_4^{(4)} = (0, 0, 0, 4, 5);$$

$$M_4^{(5)} = (0, 0, 0, 5, 4);$$

$$M_4^{(6)} = (0, 0, 0, 6, 2).$$

Рассмотрим распределение неправильных чисел по интервалам числового диапазона в зависимости от величины ошибки.

Основание $p_1 = 2$. Число с ошибкой $\Delta\alpha_1 = 1$ попадает в интервал с номером

$$d_5 = \left[\frac{11}{2} \right] (\text{mod } 11) + \delta = 5 + \delta,$$

т. е. ошибка переводит число в пятый или шестой интервал.

Основание $p_2 = 3$. Ошибка $\Delta\alpha_2 = 1$ переведет число в интервал

$$d_5 = \left[\frac{2 \cdot 11}{3} \right] (\text{mod } 11) + \delta = 7 + \delta,$$

т. е. в 7-й или 8-й интервалы. Ошибка $\Delta\alpha_2 = 2$ переведет число в

$$d_5 = \left[\frac{4 \cdot 11}{3} \right] (\text{mod } 11) + \delta = 3 + \delta$$

— третий или четвертый интервалы.

Основание $p_3 = 5$. Число с ошибкой $\Delta\alpha_3 = 1$ попадает в интервал

$$d_5 = \left[\frac{3 \cdot 11}{5} \right] (\text{mod } 11) + \delta = 6 + \delta.$$

При ошибке $\Delta\alpha_3 = 2$ получим

$$d_5 = \left[\frac{2 \cdot 3 \cdot 11}{5} \right] (\text{mod } 11) + \delta = 2 + \delta.$$

При $\Delta\alpha_3 = 3$ получим

$$d_5 = \left[\frac{3 \cdot 3 \cdot 11}{5} \right] (\text{mod } 11) + \delta = 8 + \delta.$$

При $\Delta\alpha_3 = 4$ будем иметь

$$d_5 = \left[\frac{4 \cdot 3 \cdot 11}{5} \right] (\text{mod } 11) + \delta = 4 + \delta.$$

Основание $p_4 = 7$. Число с ошибкой $\Delta\alpha_4 = 1$ попадает в интервал

$$d_5 = \left[\frac{11}{7} \right] (\text{mod } 11) + \delta = 1 + \delta.$$

Ошибка $\Delta\alpha_4 = 2$ переводит число в интервал

$$d_5 = \left[\frac{2 \cdot 11}{7} \right] (\text{mod } 11) + \delta = 3 + \delta.$$

$\Delta\alpha_4 = 3$ переводит число в интервал

$$d_5 = \left[\frac{3 \cdot 11}{7} \right] (\bmod 11) + \delta = 4 + \delta.$$

При $\Delta\alpha_4 = 4$ получим

$$d_5 = \left[\frac{4 \cdot 11}{7} \right] (\bmod 11) + \delta = 6 + \delta.$$

При $\Delta\alpha_4 = 5$ будем иметь

$$d_5 = \left[\frac{5 \cdot 11}{7} \right] (\bmod 11) + \delta = 7 + \delta.$$

Ошибка $\Delta\alpha_4 = 6$ переведет число в интервал

$$d_5 = \left[\frac{6 \cdot 11}{7} \right] (\bmod 11) + \delta = 9 + \delta.$$

Полученные результаты позволяют построить таблицу, в которой значения d_5 сопоставлены с возможными ошибками $\Delta\alpha_i$. Несомненно, что каждому значению d_5 может соответствовать ошибка и по контрольному основанию. Обозначив ее через Δ_k , будем иметь в качестве возможной ошибки значение $\Delta_k = d_5$.

Значение	Возможные ошибки
0	Число правильно, ошибок нет.
1	$\Delta\alpha_4 = 1; \Delta_k = 1.$
2	$\Delta\alpha_3 = 2; \Delta\alpha_4 = 1; \Delta_k = 2.$
3	$\Delta\alpha_2 = 2; \Delta\alpha_3 = 2; \Delta\alpha_4 = 2; \Delta_k = 3.$
4	$\Delta\alpha_2 = 2; \Delta\alpha_3 = 4; \Delta\alpha_4 = 2; \Delta\alpha_4 = 3; \Delta_k = 4.$
5	$\Delta\alpha_1 = 1; \Delta\alpha_3 = 4; \Delta\alpha_4 = 3; \Delta_k = 5.$
6	$\Delta\alpha_1 = 1; \Delta\alpha_3 = 1; \Delta\alpha_4 = 4; \Delta_k = 6.$
7	$\Delta\alpha_2 = 1; \Delta\alpha_3 = 1; \Delta\alpha_4 = 4; \Delta\alpha_4 = 5; \Delta_k = 7.$
8	$\Delta\alpha_2 = 1; \Delta\alpha_3 = 3; \Delta\alpha_4 = 5; \Delta_k = 8.$
9	$\Delta\alpha_3 = 3; \Delta\alpha_4 = 6; \Delta_k = 9.$
10	$\Delta\alpha_4 = 6; \Delta_k = 10.$

Пусть задано неправильное число A' :

$$A' = (1, 1, 4, 1, 1),$$

к которому в процессе решения задачи прибавляется правильное число B :

$$B = (0, 2, 0, 4, 2).$$

Попробуем определить местоположение и величину ошибки в числе A' . Проведем нулевизацию числа A' .

$$\begin{array}{r}
 (1, 1, 4, 1, 1) \\
 - (1, 1, 1, 1, 1) \\
 \hline
 (0, 0, 3, 0, 0) \\
 \\
 (0, 0, 3, 0, 0) \\
 - (0, 0, 3, 4, 7) \\
 \hline
 (0, 0, 0, 3, 4) \\
 \\
 (0, 0, 0, 3, 4) \\
 - (0, 0, 0, 3, 7) \\
 \hline
 (0, 0, 0, 0, 8)
 \end{array}$$

Поскольку $d_5=8$, то из приведенной таблицы определяем следующую альтернативную совокупность:

- ошибка $\Delta\alpha_2=1$ в цифре по основанию p_2 ;
- ошибка $\Delta\alpha_3=3$ в цифре по основанию p_3 ;
- ошибка $\Delta\alpha_4=5$ в цифре по основанию p_4 ;
- ошибка $\Delta_k=8$ в цифре по контрольному основанию.

Выполним далее операцию сложения числа A' с числом B :

$$A' + B = (1, 1, 4, 1, 1) + (0, 2, 0, 4, 2) = (1, 0, 4, 5, 3).$$

Поскольку, по нашему предположению, арифметическое устройство оперирует с правильными числами и результат операции правильный и поскольку предполагается, что за время выполнения операции не может появиться вторая ошибка, очевидно, в полученной сумме ошибка имеет ту же величину, что и в числе A .

Переместиться из цифры по одному основанию в цифру по другому основанию ошибка не может.

Нулевизируем полученную сумму:

$$\begin{array}{r}
 -(1, 0, 4, 5, 3) \\
 (1, 1, 1, 1, 1) \\
 \hline
 (0, 2, 3, 4, 2) \\
 \\
 (0, 2, 3, 4, 2) \\
 - (0, 2, 2, 2, 2) \\
 \hline
 (0, 0, 1, 2, 0) \\
 \\
 (0, 0, 1, 2, 0) \\
 - (0, 0, 1, 6, 6) \\
 \hline
 (0, 0, 0, 3, 5) \\
 \\
 -(0, 0, 0, 3, 7) \\
 \hline
 (0, 0, 0, 0, 9)
 \end{array}$$

Для суммы получено $d_5=9$.

Теперь возможна следующая альтернативная совокупность ошибок:

- ошибка $\Delta \alpha_3=3$ по основанию p_3
- ошибка $\Delta \alpha_4=6$ по основанию p_4
- ошибка $\Delta_k=9$ по контрольному основанию.

Поскольку ни величина, ни местоположение ошибки не изменяются, можно утверждать, что существует ошибка $\Delta \alpha_3=3$ по основанию p_3 .

Отсюда искомое исправленное число A может быть представлено как

$$A = A' - (0, 0, 3, 0, 0) = (1, 1, 1, 1, 1).$$

Рассмотренный пример показывает, что если при операции сложения правильного числа с неправильным числом изменяется величина d_5 , то местоположение ошибки и ее значение в ряде случаев определяются однозначно.

Рассмотренный пример демонстрирует тот факт, что увеличение информативности альтернативной совокупности позволило за один шаг не только определить местоположение ошибки, но и указать ее величину, т. е. полностью решить задачу контроля — отыскания места неисправности и устранения ошибки.

Факсимильная перепечатка.

Статья опубликована
в сборнике трудов II симпозиума
по использованию избыточности
в информационных системах,
Л. Наука, 1970 г., с. 308-317.